

ДИНАМИКА

ПРИЛОЖЕНИЕ ОБЩИХ ТЕОРЕМ К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела

$$M \ddot{x}_C = \sum \bar{F}_{kx}^e$$

$$M \ddot{y}_C = \sum \bar{F}_{ky}^e$$

$$M \ddot{z}_C = \sum \bar{F}_{kz}^e$$

M – масса тела, (x_C, y_C, z_C) – координаты центра масс тела,

$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ – внешние силы

Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела являются дифференциальными уравнениями движения центра масс тела C .

Дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела

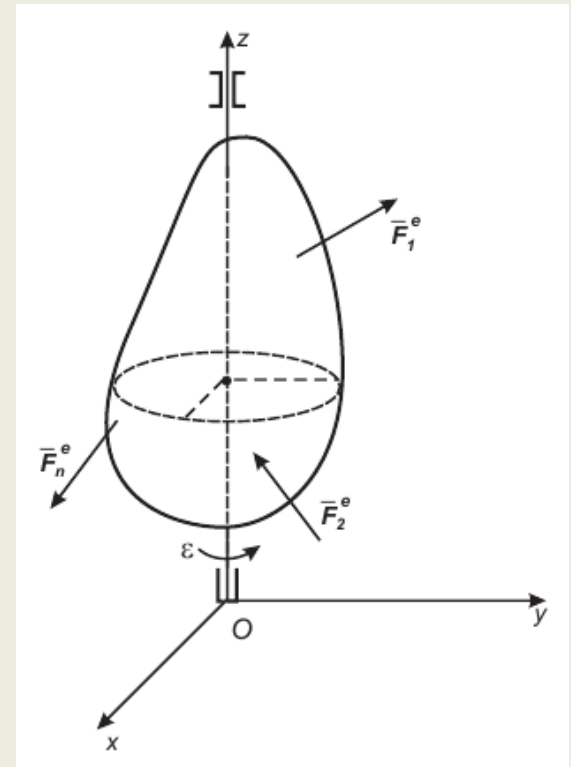
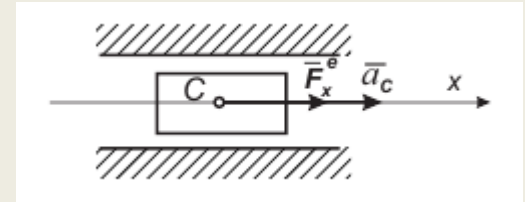
$$J_z \varepsilon = \sum m_z(\bar{F}_k^e)$$

$$\text{или } J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z(\bar{F}_k^e)$$

$$\text{или } J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_z(\bar{F}_k^e)$$

z – ось вращения, $\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ – внешние силы

J_z – момент инерции тела относительно оси вращения – мера инертности при вращательном движении, чем больше момент инерции тела, тем меньше угловое ускорение, и наоборот.



ДИНАМИКА

ПРИЛОЖЕНИЕ ОБЩИХ ТЕОРЕМ К ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела

Плоскопараллельное движение твердого тела можно задать движением сечения этого тела плоскостью параллельной плоскости движения и проходящей через центр масс. Пусть на тело действуют внешние силы, лежащие в плоскости этого сечения. Положение сечения определяется в любой момент времени положением полюса и углом поворота φ вокруг полюса. За полюс принимаем центр масс C .

$$M \ddot{x}_C = \sum \bar{F}_{kx}^e$$

$$M \ddot{y}_C = \sum \bar{F}_{ky}^e$$

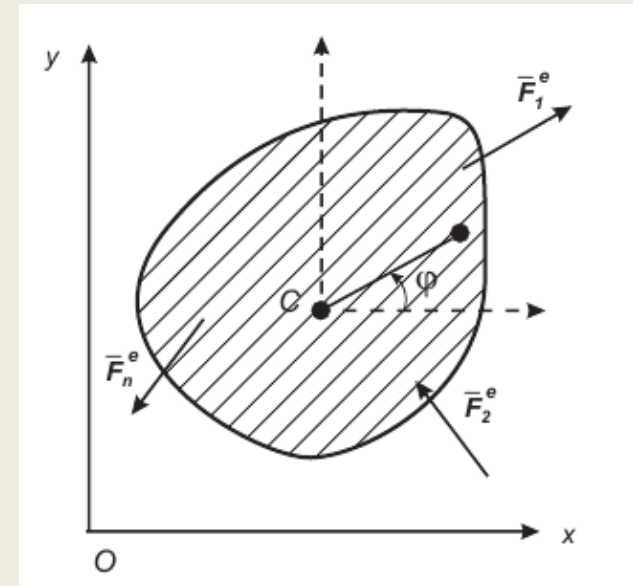
$$J_{z_C} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum m_{z_C} (\bar{F}_k^e)$$

M – масса тела, (x_C, y_C) – координаты центра масс тела,

$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ – внешние силы, лежащие в плоскости xOy

z_C – ось, проходящая через центр масс перпендикулярно плоскости xOy ,

J_{z_C} – центральный момент инерции тела



Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела представляют собой дифференциальные уравнения поступательного движения тела вместе с центром масс C и вращательного движения тела вокруг оси z_C , проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости xOy

ДИНАМИКА

Применение

Дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела

Задача

Ведомое колесо автомобиля катится без проскальзывания вверх по наклонной плоскости под действием силы тяги P_T , приложенной к оси колеса. Определить ускорение центра масс колеса.

Исходные данные:

Масса колеса m ; сила тяги $P_T = 2mg$; радиус колеса r ; радиус инерции колеса $i = \sqrt{2} r$

Найти: a_C

Решение

Дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела:

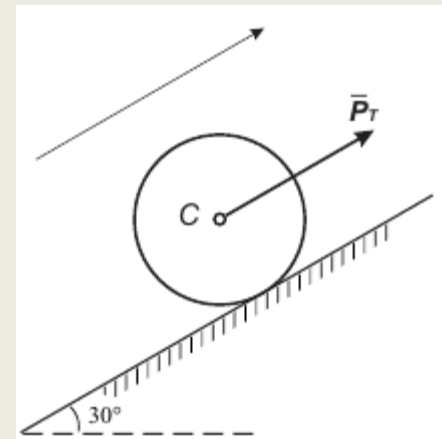
$$\begin{cases} ma_{Cx} = \sum \bar{F}_{kx}^e \\ ma_{Cy} = \sum \bar{F}_{ky}^e \\ J_{z_C} \varepsilon = \sum m_{z_C} (\bar{F}_k^e) \end{cases}$$

M – масса тела, C – центр масс

$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ – внешние силы

J_{z_C} – центральный момент инерции тела

ε – мгновенное угловое ускорение тела



ДИНАМИКА

Применение

Дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела

Исходные данные:

Масса колеса m ; сила тяги $P_T = 2mg$; радиус колеса r ; радиус инерции колеса $i = \sqrt{2} r$

Найти: a_C

Колесо совершает плоскопараллельное движение (C – центр масс, P – мгновенный центр скоростей).

Сила трения качения – сила сцепления $F_{c\mu}$ приложена в сторону противоположную возможному скольжению точки касания колеса по неподвижной поверхности.

Осевой момент инерции колеса $J_{z_C} = m \cdot i^2 = 2mr^2$

Уравнения движения колеса:

$$\begin{cases} m a_{Cx} = P_T - G \sin 30^\circ - F_{c\mu} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m a_{Cy} = N - G \cos 30^\circ \end{cases} \quad (2)$$

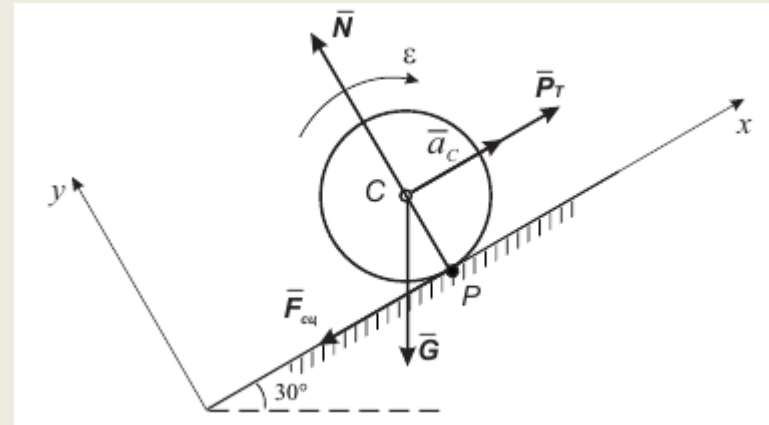
$$\begin{cases} J_{z_C} \varepsilon = F_{c\mu} \cdot r \end{cases} \quad (3)$$

Примечание: уравнение (2) представляет собой уравнение статики, так как относительно оси y колесо не движется

$$(3) \Rightarrow F_{c\mu} = \frac{J_{z_C} \varepsilon}{r} = \frac{2mr^2}{r} \frac{a_C}{r} = 2ma_C$$

$$(1) \Rightarrow ma_C = 2mg - 0,5mg - 2ma_C$$

$$a_C = \frac{2mg - 0,5mg}{3m} = 0,5g$$



Соотношения между ускорениями:

$$a_{Cx} = a_C$$

$$a_{Cy} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{a_{Cx}}{CP} = \frac{a_C}{r}$$

$$(2) \Rightarrow N = G \cos 30^\circ = mg \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $a_C = 0,5g$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Общие принципы механики – дают единый подход к решению задач статики и динамики

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Принцип Даламбера для точки

Уравнение движения точки (второй закон Ньютона):

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k$$

$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ - силы, действующие на точку.

Введем в рассмотрение величину, имеющую размерность силы:

$$\bar{F}^u = -m\bar{a}$$

Векторную величину, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную противоположно этому ускорению, называют **силой инерции** точки.

Принцип Даламбера для материальной точки:

$$\sum \bar{F}_k + \bar{F}^u = 0$$

если в любой момент времени к действующим на точку силам присоединить силу инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Общие принципы механики – дают единый подход к решению задач статики и динамики

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Принцип Даламбера для системы

Рассмотрим систему материальных точек. По основному закону динамики для каждой точки системы

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$$

m_k - масса точки, \bar{F}_k^e - равнодействующая внешних сил, \bar{F}_k^i - равнодействующая внутренних сил.

Для каждой точки системы введем **силу инерции**:

$$\bar{F}_k^u = -m \bar{a}_k$$

Принцип Даламбера для системы:

если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять все уравнения статики.

$$\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{F}_k^u = 0$$

Таким образом, задачи динамики могут решаться методами статики. Силы инерции – *фиктивные* силы, если бы они существовали в действительности, все точки системы находились бы в покое.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра О равны нулю

$$\begin{aligned} \sum (\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{F}_k^u) &= 0 \\ \sum (m_O(\bar{F}_k^e) + m_O(\bar{F}_k^i) + m_O(\bar{F}_k^u)) &= 0 \end{aligned}$$

Для механической системы геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов относительно любого центра равны нулю:

$$\sum \bar{F}_k^i = 0 \qquad \sum m_O(\bar{F}_k^i) = 0$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Общие принципы механики – дают единый подход к решению задач статики и динамики

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Принцип Даламбера для системы

если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять все уравнения статики.

Исключаем внутренние силы

$$\begin{aligned}\sum (\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^u) &= 0 \\ \sum (m_O(\bar{F}_k^e) + m_O(\bar{F}_k^u)) &= 0\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\bar{\Phi}^u = \sum \bar{F}_k^u \qquad M_O^u = \sum m_O(\bar{F}_k^u)$$

$\bar{\Phi}^u$ - главный вектор сил инерции,

M_O^u - главный момент сил инерции относительно центра O.

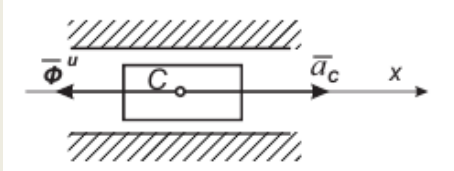
получим **уравнения метода кинестатики**:

$$\begin{aligned}\sum \bar{F}_k^e + \bar{\Phi}^u &= 0 \\ \sum m_O(\bar{F}_k^e) + M_O^u &= 0\end{aligned}$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Приведение сил инерции твердого тела

1. Поступательное движение твердого тела

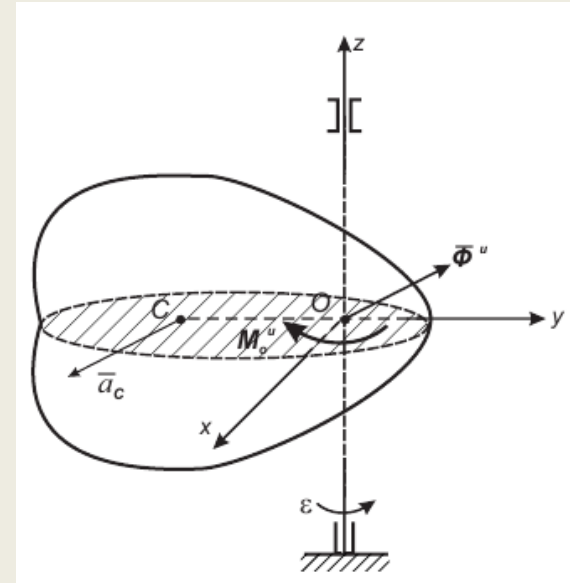


$$\bar{\Phi}^u = -M \bar{a}_C$$

при поступательном движении силы инерции твердого тела приводятся к главному вектору, проходящему через центр масс тела, главный момент равен нулю

2. Вращательное движение твердого тела

Пусть тело имеет плоскость материальной симметрии xOy и вращается вокруг оси Oz, перпендикулярной этой плоскости. Если привести силы инерции к центру O, то вследствие симметрии главный вектор и пара, равная главному моменту, будут лежать в плоскости xOy



$$\bar{\Phi}^u = -M \bar{a}_C$$

$$M_O^u = -J_{zO} \varepsilon$$

система сил инерции приводится к главному вектору, приложенному в точке O, и к паре сил равной главному моменту и лежащей в плоскости материальной симметрии тела.

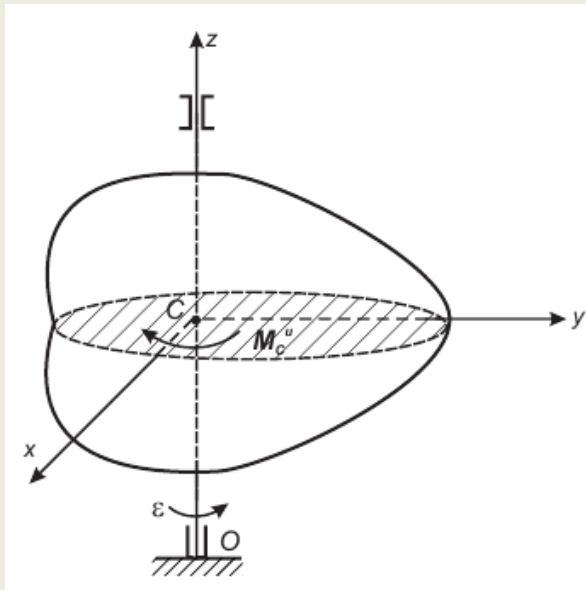
3. Вращательное движение твердого тела вокруг оси, проходящей через центр масс

Пусть тело имеет плоскость материальной симметрии xCy и вращается вокруг оси z_C, перпендикулярной этой плоскости и проходящей через центр масс тела C.

$$\bar{\Phi}^u = 0$$

$$M_C^u = -J_{zC} \varepsilon$$

в этом случае система сил инерции тела приводится к одной только паре с моментом M_C^u , лежащей в плоскости симметрии тела.



АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Приведение сил инерции твердого тела

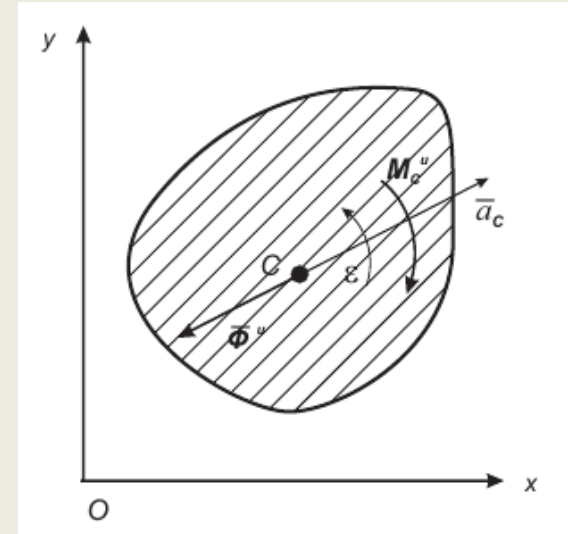
4. Плоскопараллельное движение твердого тела

Пусть тело имеет плоскость материальной симметрии и движется параллельно этой плоскости

$$\bar{\Phi}^u = -M \bar{a}_C \qquad M_C^u = -J_{z_C} \varepsilon$$

система сил инерции тела приведется к главному вектору, приложенному в центре масс C тела, и паре сил равной главному моменту, лежащим в плоскости материальной симметрии тела.

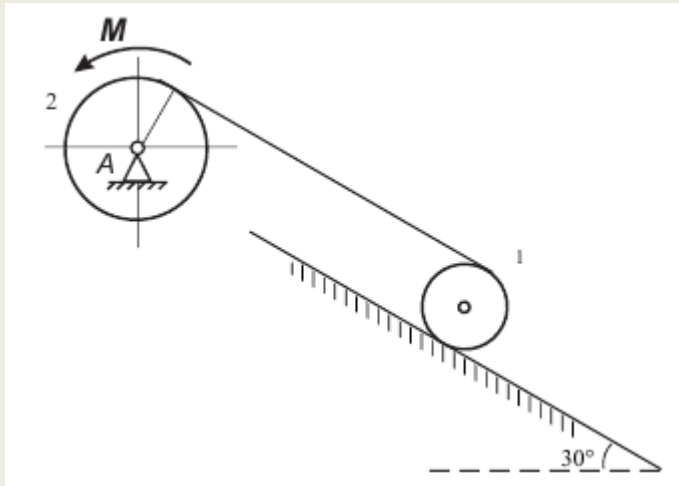
Примечание: случай (2) вращательного движения твердого тела вокруг оси, не проходящей через центр масс, может быть рассмотрен, как частный случай плоскопараллельного движения.



Применение метода кинетостатики

Задача

Электролебедка 2 приводит в движение каток 1. Каток (масса распределена по ободу) катится без проскальзывания вверх по наклонной плоскости под действием постоянного момента M , создаваемого двигателем лебедки. Определить реакции шарнирной опоры A и силу натяжения троса (трос считать невесомым и нерастяжимым).



Уравнения метода кинетостатики:

$$\sum \bar{F}_k^e + \bar{\Phi}^u = 0$$

$$\sum m_O (\bar{F}_k^e) + M_O^u = 0$$

Приведение сил инерции твердого тела

Вращательное движение твердого тела вокруг оси, проходящей через центр масс

$$\bar{\Phi}^u = 0$$

$$M_C^u = -J_{z_C} \varepsilon$$

Плоскопараллельное движение твердого тела

$$\bar{\Phi}^u = -M \bar{a}_C$$

$$M_C^u = -J_{z_C} \varepsilon$$

Исходные данные:

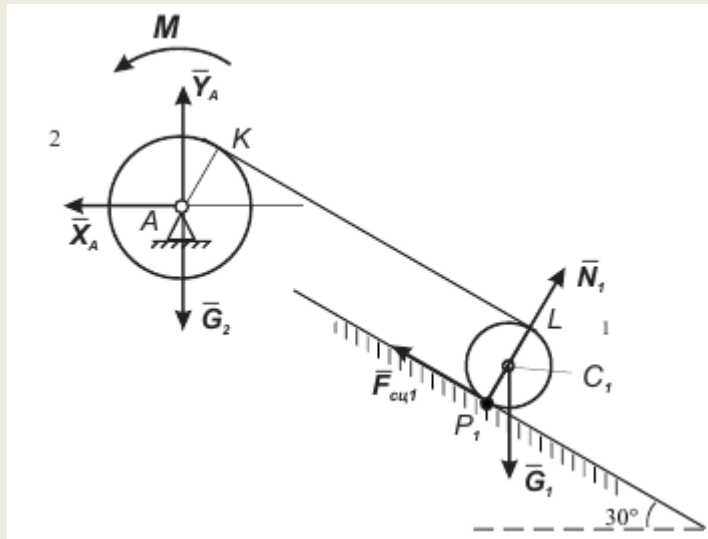
Момент, создаваемый двигателем, $M=3mgr=const$,
масса катка $m_1=m$, масса барабана лебедки $m_2=2m$;
радиус катка $r_1=r$; радиус барабана $R_2=1,5r$,
радиус инерции барабана $i_2=\sqrt{2} r$

Найти: X_A , Y_A , T

Применение метода кинетостатики

Задача

Электролебедка 2 приводит в движение каток 1. Каток (масса распределена по ободу) катится без проскальзывания вверх по наклонной плоскости под действием постоянного момента M , создаваемого двигателем лебедки. Определить реакции шарнирной опоры A и силу натяжения троса (трос считать невесомым и нерастяжимым).



Решение

Реакции шарнирной опоры A будем рассматривать как внешние силы.

Сила натяжения троса T не может быть определена из уравнений кинетостатики, составленных для системы в целом

Сила трения качения – сила сцепления $F_{сц}$ приложена в сторону противоположную возможному скольжению точки касания катка по неподвижной поверхности.

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение (C_1 – центр масс, P_1 – мгновенный центр скоростей)

Барaban 2 совершает вращательное движение

Исходные данные:

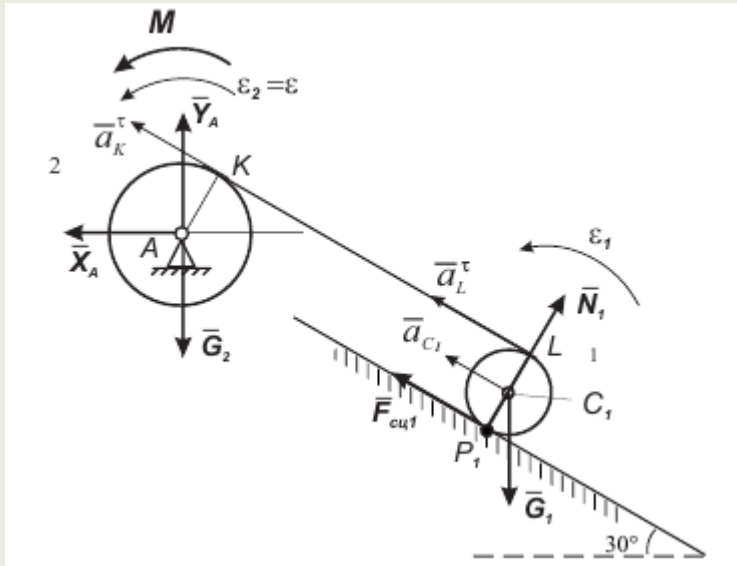
Момент, создаваемый двигателем, $M=3mgr=const$,
масса катка $m_1=m$, масса барабана лебедки $m_2=2m$;
радиус катка $r_1=r$; радиус барабана $R_2=1,5r$,
радиус инерции барабана $i_2=\sqrt{2} r$

Найти: X_A , Y_A , T

Применение метода кинетостатики

Задача

Электролебедка 2 приводит в движение каток 1. Каток (масса распределена по ободу) катится без проскальзывания вверх по наклонной плоскости под действием постоянного момента M , создаваемого двигателем лебедки. Определить реакции шарнирной опоры A и силу натяжения троса (трос считать невесомым и нерастяжимым).



Соотношения между ускорениями (все ускорения выразим через угловое ускорение барабана):

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \varepsilon \\ a_K^\tau &= \varepsilon_2 \cdot R_2 = \varepsilon \cdot 1,5r = 1,5r \cdot \varepsilon \\ a_L^\tau &= a_K^\tau = 1,5r \cdot \varepsilon \\ \varepsilon_1 &= \frac{a_L^\tau}{LP_1} = \frac{a_L^\tau}{2r_1} = \frac{1,5r \cdot \varepsilon}{2r} = 0,75\varepsilon \\ a_{C_1} &= \varepsilon_1 \cdot C_1P_1 = \varepsilon_1 \cdot r_1 = 0,75r \cdot \varepsilon\end{aligned}$$

Исходные данные:

Момент, создаваемый двигателем, $M=3mgr=const$,
масса катка $m_1=m$, масса барабана лебедки $m_2=2m$;
радиус катка $r_1=r$; радиус барабана $R_2=1,5r$,
радиус инерции барабана $i_2=\sqrt{2} r$

Найти: X_A, Y_A, T

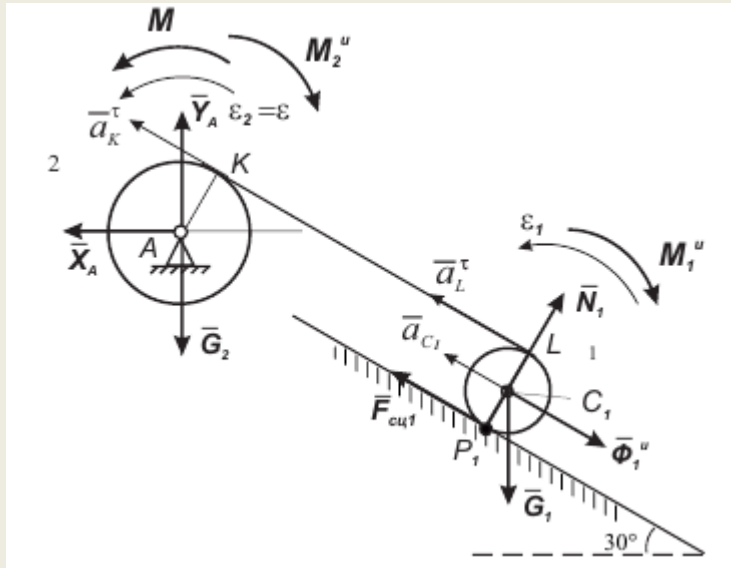
Получим соотношения между ускорениями :

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \varepsilon \\ \varepsilon_1 &= 0,75\varepsilon \\ a_{C_1} &= 0,75r \cdot \varepsilon\end{aligned}$$

Применение метода кинетостатики

Задача

Электролебедка 2 приводит в движение каток 1. Каток (масса распределена по ободу) катится без проскальзывания вверх по наклонной плоскости под действием постоянного момента M , создаваемого двигателем лебедки. Определить реакции шарнирной опоры A и силу натяжения троса (трос считать невесомым и нерастяжимым).



Главные векторы и главные моменты сил инерции:

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение (C_1 – центр масс, P_1 – мгновенный центр скоростей)

$$\Phi_1^u = m_1 a_{C_1},$$

$$M_1^u = J_1 \varepsilon_1, \quad J_1 = m_1 r_1^2 = m r^2 - \text{момент инерции катка 1}$$

Барабан 2 совершает вращательное движение

$$M_2^u = J_2 \varepsilon_2, \quad J_2 = m_2 i_2^2 = 4 m r^2 - \text{момент инерции барабана 2}$$

С учетом соотношений между ускорениями $\varepsilon_2 = \varepsilon$

$$\varepsilon_1 = 0,75 \varepsilon$$

$$a_{C_1} = 0,75 r \cdot \varepsilon$$

Исходные данные:

Момент, создаваемый двигателем, $M = 3mgr = \text{const}$,
масса катка $m_1 = m$, масса барабана лебедки $m_2 = 2m$;
радиус катка $r_1 = r$; радиус барабана $R_2 = 1,5r$,
радиус инерции барабана $i_2 = \sqrt{2} r$

Найти: X_A, Y_A, T

и соотношений между массово-инерционными характеристиками, силы инерции примут вид:

$$\Phi_1^u = m_1 a_{C_1} = 0,75 m r \cdot \varepsilon,$$

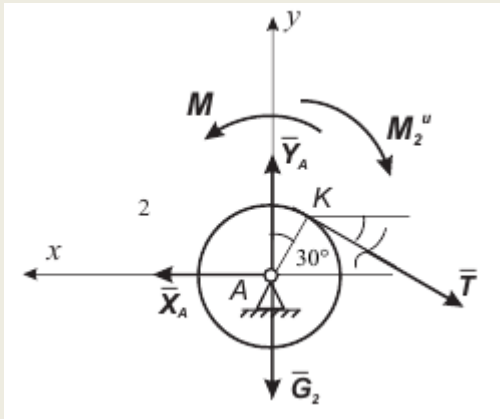
$$M_1^u = m r^2 \cdot 0,75 \varepsilon = 0,75 m r^2 \cdot \varepsilon$$

$$M_2^u = 4 m r^2 \cdot \varepsilon$$

Применение метода кинетостатики

Задача

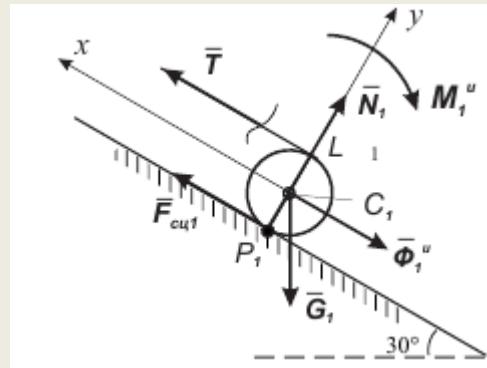
Электролебедка 2 приводит в движение каток 1. Каток (масса распределена по ободу) катится без проскальзывания вверх по наклонной плоскости под действием постоянного момента M , создаваемого двигателем лебедки. Определить реакции шарнирной опоры A и силу натяжения троса (трос считать невесомым и нерастяжимым).



Чтобы найти силу натяжения троса, систему разобьем на части: барабан 2 и каток 1.

Уравнения метода кинетостатики составим для каждой части системы.

Уравнение кинетостатики для катка 1



$$\sum F_{kx} = 0 \Rightarrow T - \Phi_1^u - G_1 \sin 30^\circ + F_{cy1} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \Rightarrow N_1 - G_1 \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_C(\bar{F}_k) = 0 \Rightarrow T \cdot r - F_{cy1} \cdot r - M_1^u = 0 \quad (3)$$

Примечание: уравнение (2) представляет собой уравнение статики, так как относительно оси y колесо не движется

$$(2) \Rightarrow N_1 = G_1 \cos 30^\circ = mg \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(1) \Rightarrow F_{cy1} = \Phi_1^u + G_1 \sin 30^\circ - T$$

$$(3) \Rightarrow T \cdot r - (\Phi_1^u + G_1 \sin 30^\circ - T) \cdot r - M_1^u = 0$$

$$T = 0,5 \left(\Phi_1^u + G_1 \sin 30^\circ + \frac{M_1^u}{r} \right) = 0,5(0,75mr\varepsilon + 2mg \cdot 0,5 + 0,75mr\varepsilon)$$

$$T = 0,75mr\varepsilon + 0,5mg \quad (*)$$

Исходные данные:

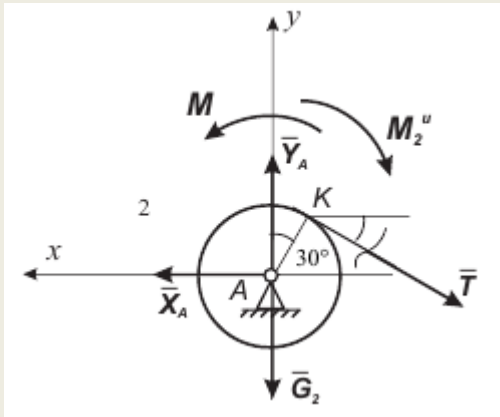
Момент, создаваемый двигателем, $M = 3mgr = \text{const}$,
масса катка $m_1 = m$, масса барабана лебедки $m_2 = 2m$;
радиус катка $r_1 = r$; радиус барабана $R_2 = 1,5r$,
радиус инерции барабана $i_2 = \sqrt{2} r$

Найти: X_A, Y_A, T

Применение метода кинетостатики

Задача

Электролебедка 2 приводит в движение каток 1. Каток (масса распределена по ободу) катится без проскальзывания вверх по наклонной плоскости под действием постоянного момента M , создаваемого двигателем лебедки. Определить реакции шарнирной опоры A и силу натяжения троса (трос считать невесомым и нерастяжимым).



Чтобы найти силу натяжения троса, систему разобьем на части: барабан 2 и каток 1.

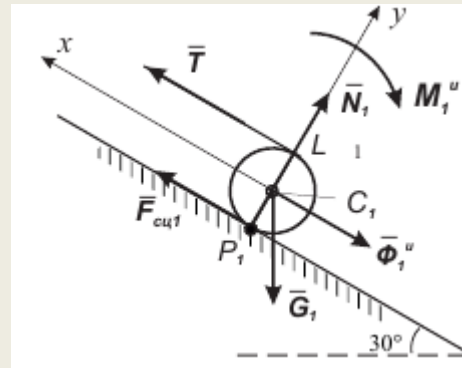
Уравнения метода кинетостатики составим для каждой части системы.

Уравнение кинетостатики для барабана 2

$$\sum F_{kx} = 0 \Rightarrow X_A - T \cos 30^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \Rightarrow Y_A - T \sin 30^\circ - G_2 = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \Rightarrow M - T \cdot 1,5r - M_2^u = 0 \quad (6)$$



Исходные данные:

Момент, создаваемый двигателем, $M = 3mgr = \text{const}$,
масса катка $m_1 = m$, масса барабана лебедки $m_2 = 2m$;
радиус катка $r_1 = r$; радиус барабана $R_2 = 1,5r$,
радиус инерции барабана $i_2 = \sqrt{2} r$

Найти: X_A , Y_A , T

$$(6) \Rightarrow T = \frac{M - M_2^u}{1,5r} = \frac{3mgr - 4mr^2 \cdot \varepsilon}{1,5r} = 2mg - 2,67mr\varepsilon$$

$$(*) \Rightarrow 0,75mr\varepsilon + 0,5mg = 3mg - 4mr\varepsilon \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{2,5mg}{4,75mr} = \frac{2,5g}{4,75r}$$

$$T = 2mg - 2,67mr \frac{2,5g}{4,75r} = 0,595mg$$

$$(4) \Rightarrow X_A = T \cos 30^\circ = 0,595mg \cdot 0,866 = 0,515mg$$

$$(5) \Rightarrow Y_A = T \sin 30^\circ + G_2 = 0,595mg \cdot 0,5 + 2mg = 2,2975mg$$

Примечание: Сила натяжения нити может быть только положительной

Ответ: $T = 0,595mg$ $X_A = 0,515mg$ $Y_A = 2,2975mg$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Возможные (виртуальные) перемещения системы

Возможным называется перемещение точки из данного ее положения, допускаемое связями, наложенными на точку.

Возможное перемещение механической системы - совокупность элементарных (бесконечно малых) перемещений точек системы, которые допускаются наложенными на систему связями (при выведении системы из занимаемого в данный момент времени положения).

Примечание: следует различать действительное перемещение $d\bar{r}$ движущейся точки, которое она совершает за элементарный промежуток времени dt , и возможное перемещение $\delta\bar{r}$, которого точка не совершает, а только могла бы совершить, не нарушая наложенных на нее в данный момент времени связей.

Число степеней свободы механической системы

В общем случае механическая система может иметь множество различных возможных перемещений. Однако для любой системы можно указать некоторое число таких независимых между собой перемещений, что всякое другое возможное перемещение может быть через них выражено.

Число независимых между собой возможных перемещений механической системы называются числом степеней свободы этой системы.

Точка, находящаяся на плоскости, имеет две степени свободы; свободная материальная точка имеет три степени свободы. У свободного твердого тела шесть степеней свободы. У кривошипно-ползунного механизма одна степень свободы.

Возможная работа - элементарная работа, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на возможном перемещении этой точки.

δA^a - возможная работа активной силы, δA^r - возможная работа реакции связи

Идеальные связи

Идеальными называются связи, для которых сумма элементарных работ их реакций на любом возможном перемещении системы равна нулю, т. е.

$$\sum \delta A_k^r = 0$$

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ - устанавливает общее условие равновесия любой механической системы:

Для каждой точки системы, находящейся в равновесии,

$$\bar{F}_k^a + \bar{F}_k^r = 0 \Rightarrow \bar{F}_k^r = -\bar{F}_k^a$$

Следовательно, для всех точек системы, находящейся в равновесии, сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил и реакций связей при любом возможном перемещении системы равна нулю:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0$$

Принцип возможных перемещений :

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

$$\sum \delta A_k^a = 0$$

Для систем с несколькими степенями свободы, это уравнение надо составлять для каждого из независимых перемещений в отдельности, т.е. число условий равновесия равно числу степеней свободы.

Примечание:

1. Если есть неидеальные связи, то их реакции (например, силы трения) следует отнести к активным силам.
2. В тех случаях, когда требуется определить реакцию идеальной связи, нужно мысленно отбросить эту связь, а соответствующую реакцию рассматривать как активную силу.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ - устанавливает общее условие равновесия любой механической системы:

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

$$\sum \delta A_k^a = 0$$

Порядок решения задач на равновесие механических систем с помощью принципа возможных перемещений:

- 1) изобразить на рисунке активные силы;
- 2) при наличии неидеальных связей добавить соответствующие реакции связей (например, силы трения);
- 3) в случае необходимости определить реакцию связи, мысленно отбросить соответствующую связь и заменить её искомой реакцией (если $\vec{R} \cdot \delta \vec{r} = 0$);
- 4) выбрать независимые возможные перемещения точек системы по числу степеней свободы этой системы;
- 5) дать возможное перемещение, соответствующее одной из степеней свободы системы, считая при этом возможные перемещения, соответствующие остальным степеням свободы, равными нулю. Выразить возможные перемещения точек приложения сил через заданное возможное перемещение;
- 6) вычислить сумму работ всех сил, указанных в пунктах 1-3, на соответствующих возможных перемещениях их точек приложения, и эту сумму приравнять нулю;
- 7) повторить пункты 5) и 6) для каждого из независимых возможных перемещений, составить систему уравнений равновесия, число которых равно числу независимых возможных перемещений, т. е. числу степеней свободы системы;
- 8) решить систему уравнений равновесия, определить искомые величины.

Применение принципа возможных перемещений

Задача 1

Механическая система состоит из грузов 1, 4 и ступенчатых барабанов 2 и 3. Тела системы находятся в равновесии под действием сил тяжести грузов.

Решение

Уравнение равновесия системы по принципу возможных перемещений: *сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы равна нулю.*

$$\sum \delta A_k^a = 0$$

Сообщим системе возможное перемещение.

Выразим все перемещения через δs_1 (система с одной степенью свободы).
Соотношения между перемещениями:

$$\delta s_L = \delta s_1$$

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta s_L}{r_2} = \frac{\delta s_1}{r}$$

$$\delta s_K = \delta \varphi_2 \cdot R_2 = \frac{\delta s_1}{r} \cdot 1,5r = 1,5 \delta s_1$$

$$\delta \varphi_3 = \frac{\delta s_K}{R_3} = \frac{1,5 \delta s_1}{2,5r} = 0,6 \frac{\delta s_1}{r}$$

$$\delta s_M = \delta \varphi_3 \cdot r_3 = 0,6 \frac{\delta s_1}{r} \cdot 1,25r = 0,75 \delta s_1$$

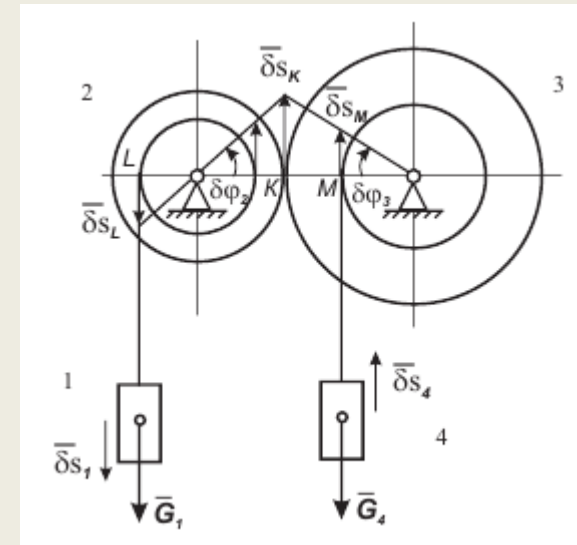
$$\delta s_4 = \delta s_M = 0,75 \delta s_1$$

Исходные данные:

$$m_1 = m;$$

$$R_2 = 1,5r; r_2 = r; R_3 = 2,5r; r_3 = 1,25r$$

Найти: массу груза 4 m_4

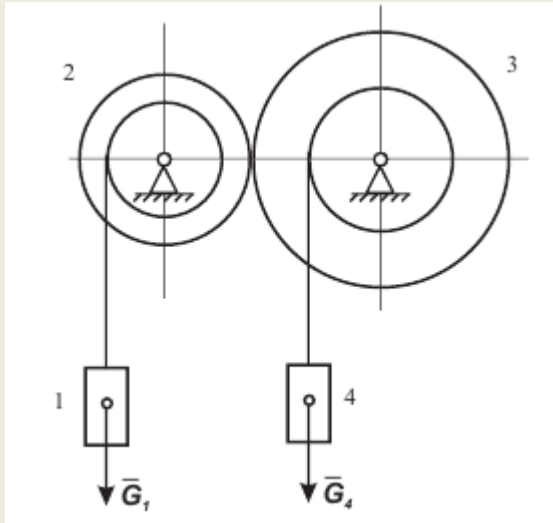


Окончательно: $\delta s_4 = 0,75 \delta s_1$

Применение принципа возможных перемещений

Задача 1

Механическая система состоит из грузов 1,4 и ступенчатых барабанов 2 и 3. Тела системы находятся в равновесии под действием сил тяжести грузов.



Исходные данные:

$$m_1 = m;$$

$$R_2 = 1,5r; r_2 = r; R_3 = 2,5r; r_3 = 1,25r$$

Найти: массу груза 4 m_4

Решение

Уравнение равновесия системы по принципу возможных перемещений: *сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы равна нулю.*

$$\sum \delta A_k^a = 0$$

Вычислим элементарную работу активных сил на возможном перемещении системы:

$$\sum \delta A_k^a = \delta A_{G_1} + \delta A_{G_4} = 0$$

$$\delta A_{G_1} = +G_1 \cdot \delta s_1$$

$$\delta A_{G_4} = -G_4 \cdot \delta s_4$$

Тогда уравнение метода возможных перемещений примет вид:

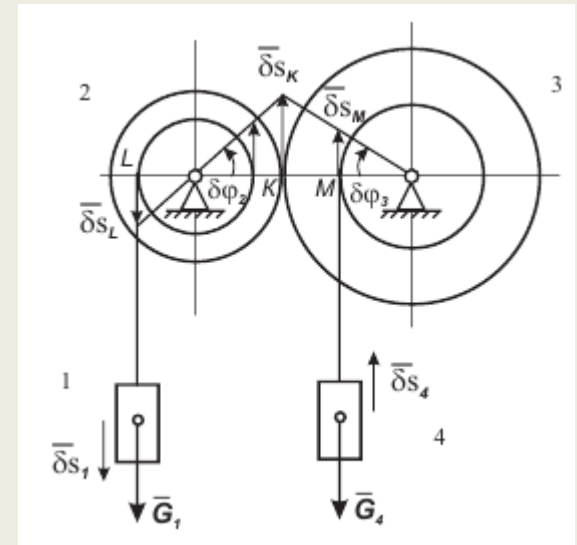
$$+G_1 \cdot \delta s_1 - G_4 \cdot \delta s_4 = 0$$

Подставим соотношения между возможными перемещениями:

$$\delta s_4 = 0,75 \delta s_1$$

$$m_1 g \cdot \delta s_1 - m_4 g \cdot 0,75 \delta s_1 = 0$$

$$m_4 = \frac{m_1}{0,75} = 4/3 m = 1,333 m$$



Ответ:

$$m_4 = 1,333 m$$

Применение принципа возможных перемещений

Задача 2

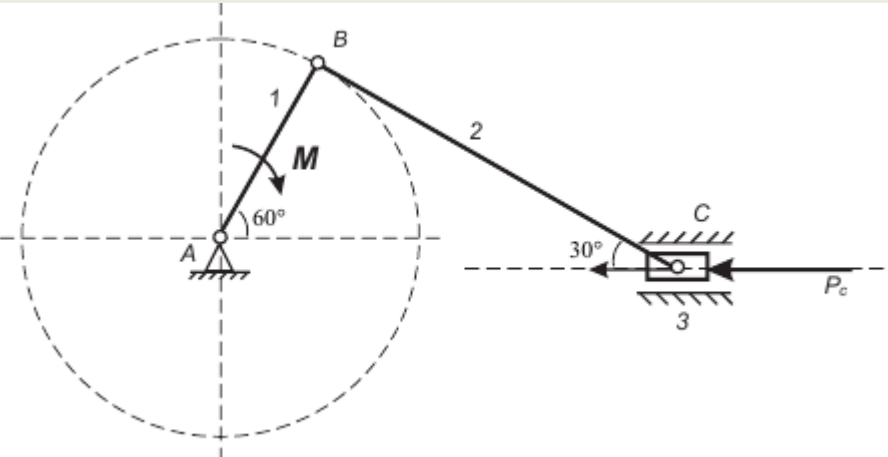
Кривошипно-ползунный механизм находится в равновесии под действием силы сопротивления P_C и уравнивающего момента M .

Решение

Уравнение равновесия системы по принципу возможных перемещений: *сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы равна нулю.*

$$\sum \delta A_k^a = 0$$

Сообщим системе возможное перемещение.

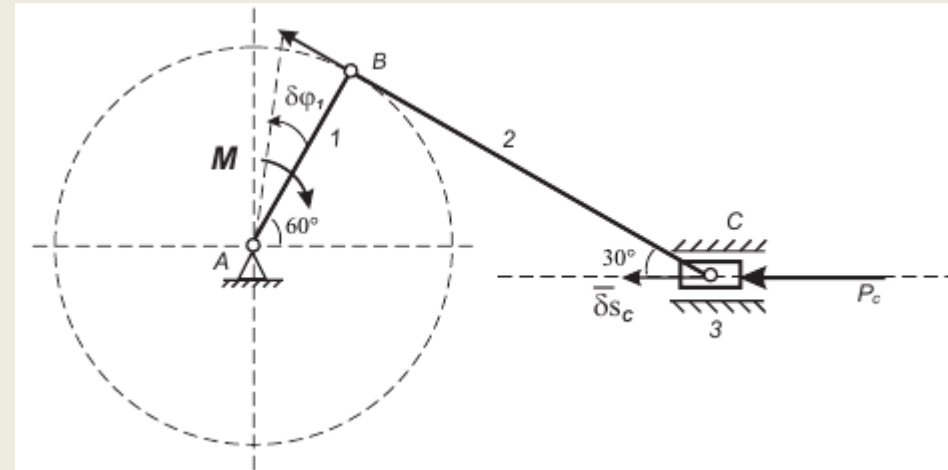


Исходные данные:

Сила $P_C = 100 \text{ Н}$;

$AB = r = 1 \text{ м}$;

Найти: момент M



Вычислим элементарную работу активных сил на возможном перемещении системы:

$$\sum \delta A_k^a = \delta A_M + \delta A_{P_C} = 0$$

$$\delta A_M = -M \cdot \delta \varphi_1$$

$$\delta A_{P_C} = +P_C \cdot \delta s_C$$

Тогда уравнение метода возможных перемещений примет вид:

$$-M \cdot \delta \varphi_1 + P_C \cdot \delta s_C = 0$$

Применение принципа возможных перемещений

Задача 2

Кривошипно-ползунный механизм находится в равновесии под действием силы сопротивления P_C и уравнивающего момента M .

Решение

Уравнение равновесия системы по принципу возможных перемещений: *сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы равна нулю:*

$$-M \cdot \delta\varphi_1 + P_C \cdot \delta s_C = 0$$

Выразим все перемещения через $\delta\varphi_1$ (система с одной степенью свободы)

Примечание: Возможные перемещения подчиняются тем же соотношениям, что и скорости

$$\delta s_B \perp BP$$

$$\delta s_C \perp CP$$

Точка P – мгновенный центр вращения (мгновенный центр скоростей)

$$CP = 2BC$$

$\triangle BCP$:

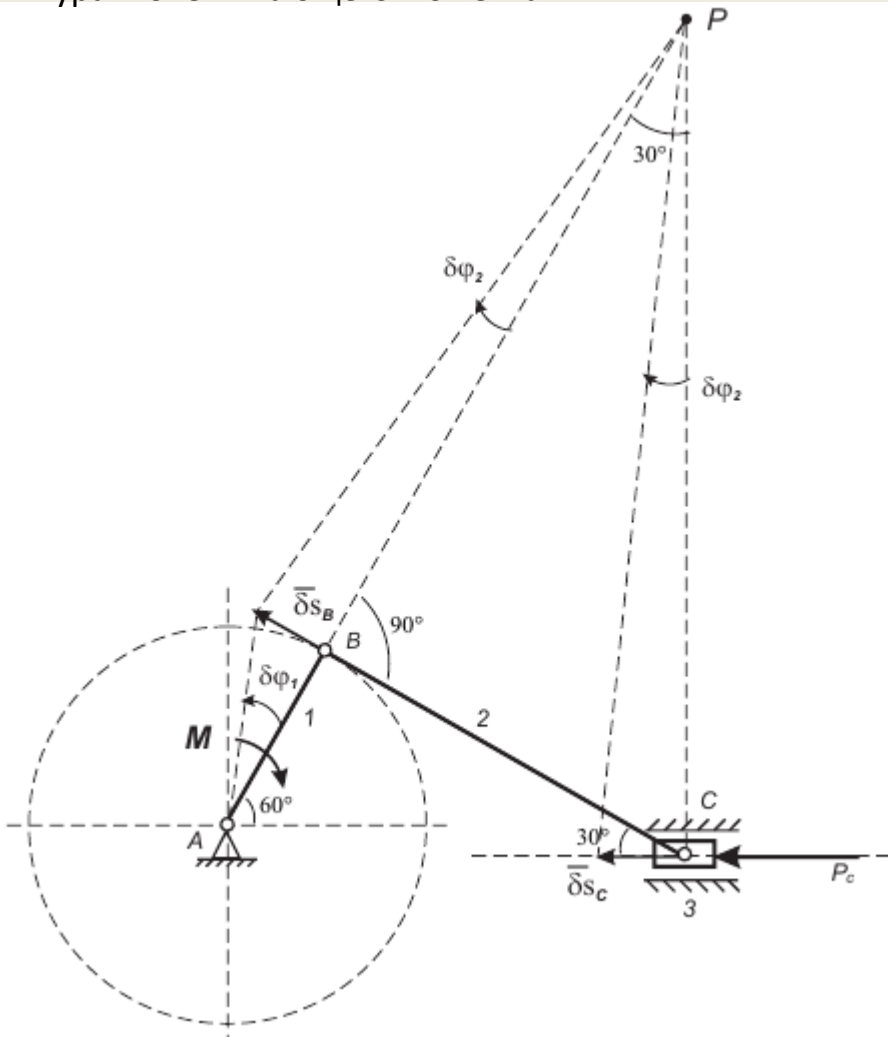
$$BP = CP \cos 30^\circ = CP \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = BC\sqrt{3}$$

Соотношения между перемещениями:

$$\delta s_B = \delta\varphi_1 \cdot AB = \delta\varphi_1 \cdot r$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_B}{BP} = \frac{\delta s_B}{BC\sqrt{3}} = \frac{\delta\varphi_1 \cdot r}{BC\sqrt{3}}$$

$$\delta s_C = \delta\varphi_2 \cdot CP = \frac{\delta\varphi_1 \cdot r}{BC\sqrt{3}} \cdot 2BC = \frac{2\sqrt{3}}{3} \delta\varphi_1 r$$



Исходные данные: сила $P_C = 100 \text{ Н}$
 $AB = r = 1 \text{ м};$

Найти: момент M

Применение принципа возможных перемещений

Задача 2

Кривошипно-ползунный механизм находится в равновесии под действием силы сопротивления P_C и уравнивающего момента M .

Решение

Уравнение равновесия системы по принципу возможных перемещений: *сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы равна нулю:*

$$-M \cdot \delta\varphi_1 + P_C \cdot \delta s_C = 0$$

Соотношения между перемещениями:

$$\delta s_C = \frac{2\sqrt{3}}{3} \delta\varphi_1 r$$

Тогда уравнение метода возможных перемещений примет вид:

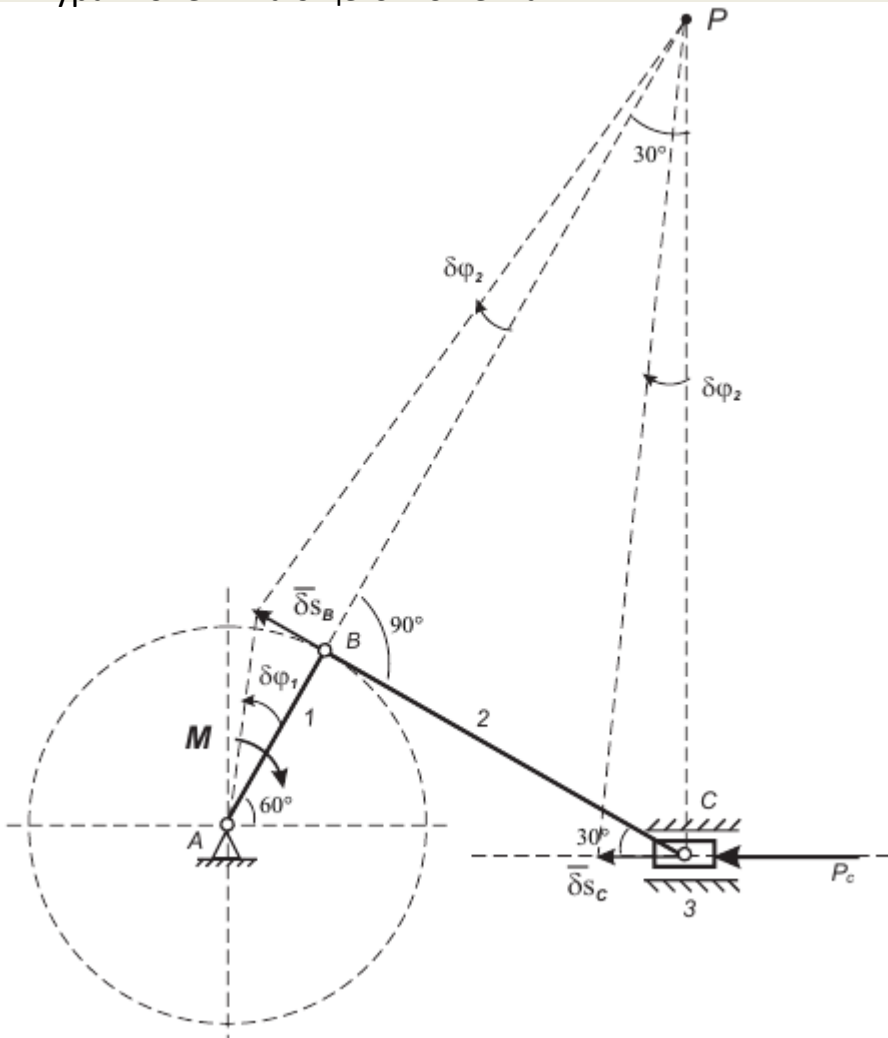
$$-M \cdot \delta\varphi_1 + P_C \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \delta\varphi_1 r = 0$$

$$M = P_C \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} r = 100 \text{ Н} \cdot 1,155 \cdot 1 \text{ м} = 115,5 \text{ Н м}$$

Исходные данные: сила $P_C = 100 \text{ Н}$
 $AB = r = 1 \text{ м};$

Найти: момент M

Ответ: $M = 115,5 \text{ Н м}$



АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ (принцип Даламбера-Лагранжа)

Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. С другой стороны, принцип Даламбера позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Следовательно, применяя эти два принципа одновременно, мы можем получить общий метод решения задач динамики.

Принцип Даламбера для системы:

$$\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{F}_k^u = 0$$

если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной.

Принцип возможных перемещений :

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

$$\sum \delta A_k^a = 0$$

Принцип Даламбера — Лагранжа:

при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0 \quad (*)$$

(*) - общее уравнение динамики

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ (принцип Даламбера-Лагранжа)

При движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

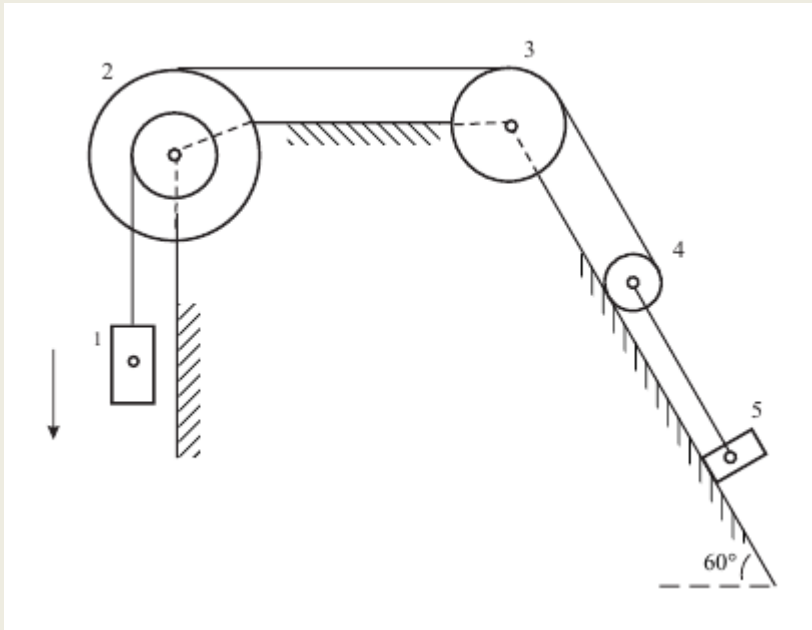
$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Порядок решения задач с помощью общего уравнения динамики для системы с одной степенью свободы:

1. изобразить на рисунке активные силы и реакции неидеальных связей (например, силы трения);
2. сделать предположение о направлении ускорений точек системы; выразить все ускорения через искомое;
3. направить на рисунке силы инерции в стороны, противоположные выбранным направлениям соответствующих ускорений;
4. записать алгебраические величины главных векторов и главных моментов сил инерции;
5. задать возможное перемещение одной из точек системы и выразить возможные перемещения точек приложения всех сил, включая силы инерции, через это возможное перемещение;
6. определить знаки работ активных сил и сил инерции в соответствии с их направлениями на рисунке и выбранными направлениями возможных перемещений точек системы
7. вычислить сумму работ всех сил, включая силы инерции, на возможных перемещениях точек системы;
8. составить общее уравнение динамики, приравняв вычисленную сумму работ нулю;
9. после сокращения полученного уравнения на заданное возможное перемещение определить искомое ускорение;
10. если найденное ускорение положительно, то сделанное предположение о направлении ускорений подтверждается, если отрицательно, то ускорения направлены в другую сторону

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями

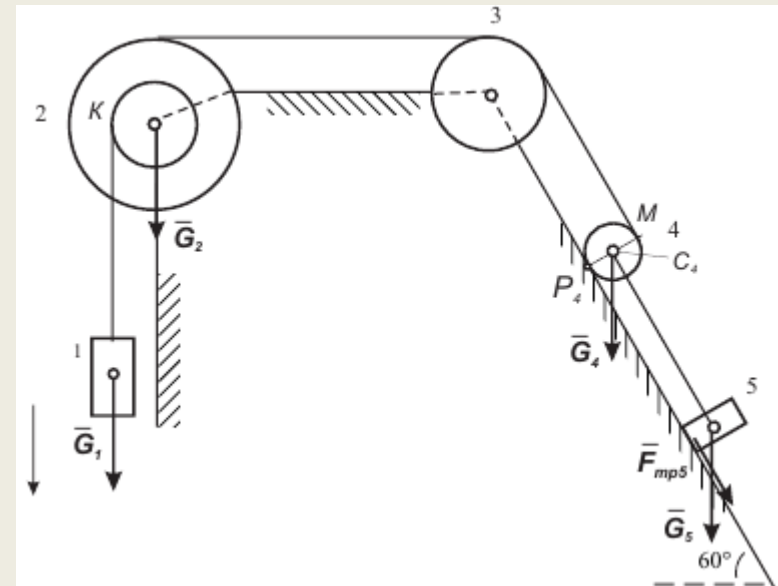
Задача 1



Механическая система состоит из грузов 1 и 5, ступенчатого шкива 2, невесомого блока 3 и катка 4 (сплошной однородный цилиндр). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми невесомыми нитями.

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести. Каток катится по шероховатой наклонной плоскости без проскальзывания. Определить ускорение груза 1 и силу натяжения нити.

Изобразим активные силы:



Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=2m$; $m_3=0$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_2=3r$; $r_2=1,5r$; радиус инерции шкива $i_2=2r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 5 о наклонную плоскость $f=0,2$;

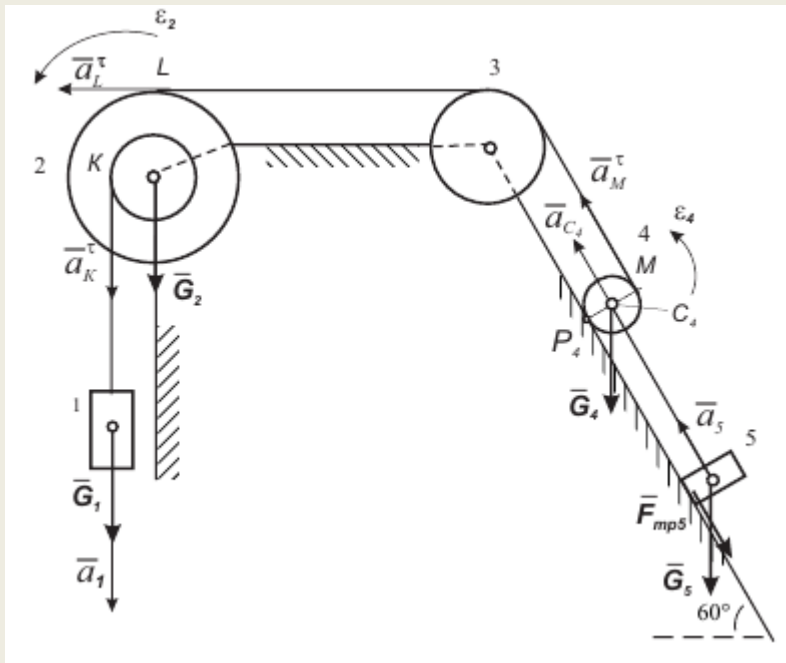
Найти: a_1 , T_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Примечание: Будем рассматривать силу трения, как активную силу

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=2m$; $m_3=0$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_2=3r$; $r_2=1,5r$; радиус инерции шкива $i_2=2r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 5 о наклонную
 плоскость $f=0,2$;

Найти: a_1 , T_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Решение

Выбираем направление ускорения груза 1 - вниз

Соотношения между ускорениями:

$$a_K^\tau = a_1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_K^\tau}{r_2} = \frac{a_1}{1,5r}$$

$$a_L^\tau = \varepsilon_2 \cdot R_2 = \frac{a_1}{1,5r} \cdot 3r = 2a_1$$

$$a_M^\tau = a_L^\tau = 2a_1$$

$$\varepsilon_4 = \frac{a_M^\tau}{MP_4} = \frac{2a_1}{2r} = \frac{a_1}{r}$$

$$a_{C_4} = \varepsilon_4 \cdot C_4P_4 = \frac{a_1}{r} \cdot r = a_1$$

$$a_5 = a_{C_4} = a_1$$

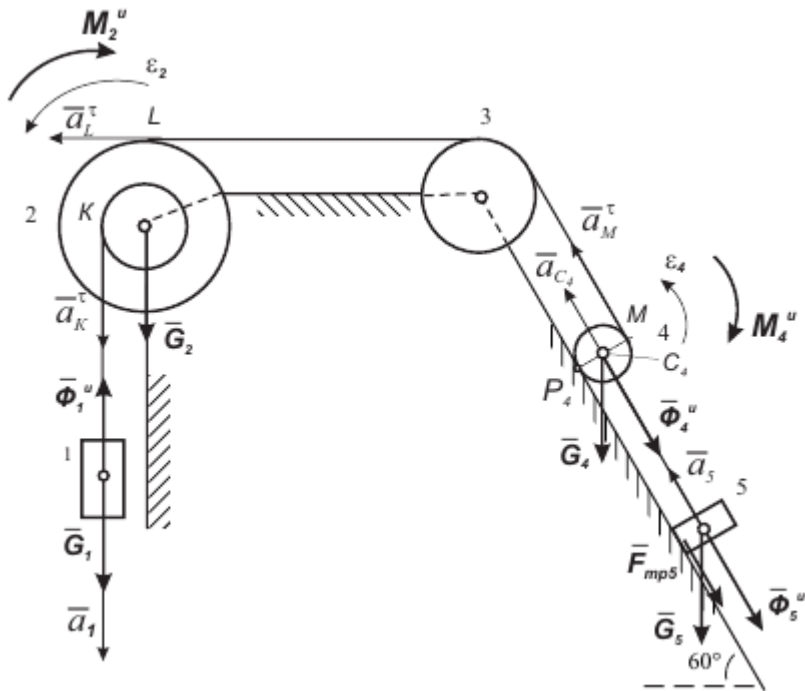
$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{1,5r}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{a_1}{r}$$

$$a_{C_4} = a_1$$

$$a_5 = a_1$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=2m$; $m_3=0$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_2=3r$; $r_2=1,5r$; радиус инерции шкива $i_2=2r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 5 о наклонную
 плоскость $f=0,2$;

Найти: a_1 , T_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Главные векторы и главные моменты сил инерции:

Груз 1 совершает поступательное движение

$$\Phi_1^u = m_1 a_1$$

Шкив 2 совершает вращательное движение

$$M_2^u = J_2 \varepsilon_2$$

Момент инерции шкива

$$J_2 = m_2 i_2^2 = 8mr^2$$

Каток 4 совершает плоскопараллельное движение
 (C_4 – центр масс, P_4 – мгновенный центр скоростей)

$$\Phi_4^u = m_4 a_{C_4}, \quad M_4^u = J_4 \varepsilon_4,$$

Момент инерции катка

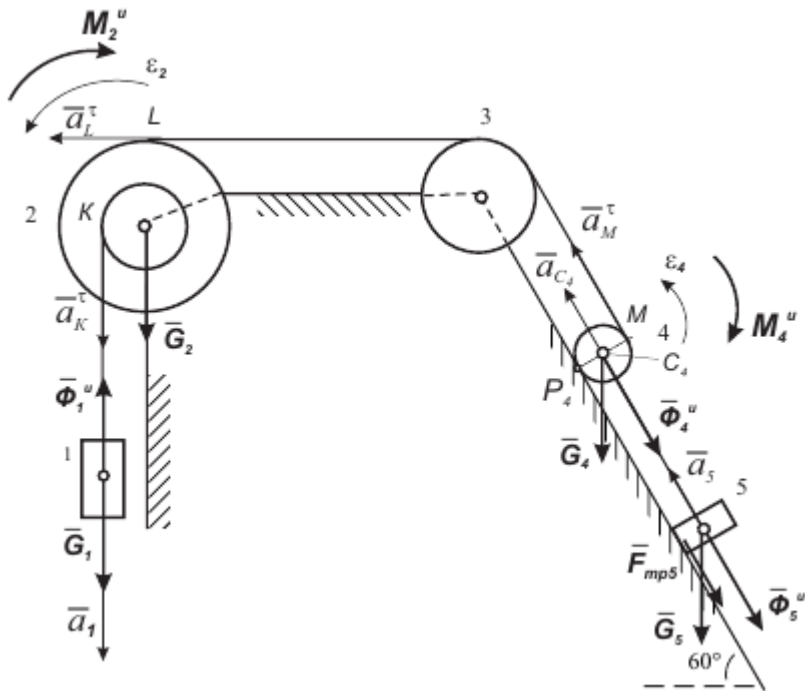
$$J_4 = \frac{1}{2} m_4 r_4^2 = 0,5mr^2$$

Груз 5 совершает поступательное движение

$$\Phi_5^u = m_5 a_5$$

Направление главных векторов и главных моментов
инерции противоположно ускорениям

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=2m$; $m_3=0$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_2=3r$; $r_2=1,5r$; радиус инерции шкива $i_2=2r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 5 о наклонную
 плоскость $f=0,2$;

Найти: a_1 , T_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

**Главные векторы и главные моменты сил инерции
с учетом соотношений между массово-инерционными
характеристиками:**

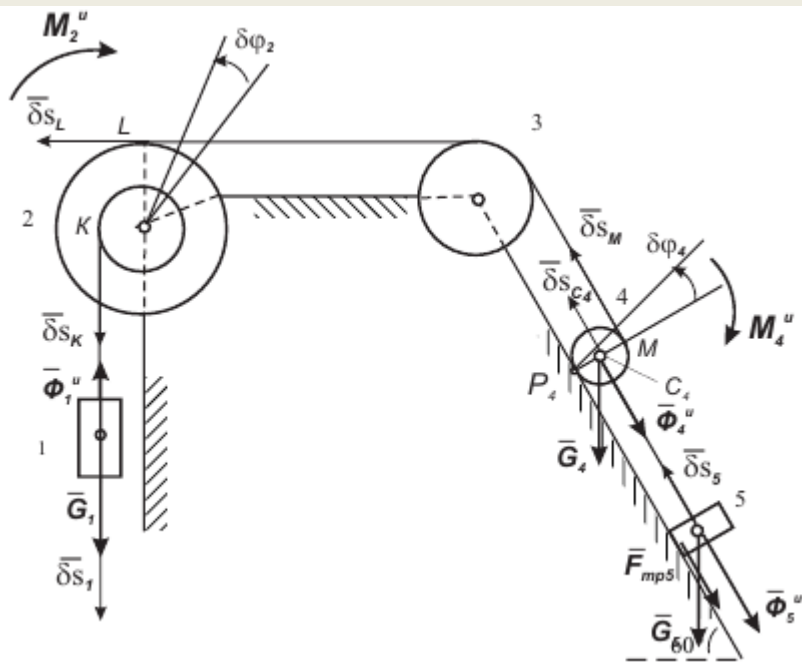
$$\begin{aligned}\Phi_1^u &= 4ma_1 & M_2^u &= 8mr^2\varepsilon_2 \\ \Phi_4^u &= ma_{C_4} & M_4^u &= 0,5mr^2\varepsilon_4, \\ \Phi_5^u &= 2ma_5\end{aligned}$$

**Главные векторы и главные моменты сил инерции
с учетом соотношений между ускорениями:**

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{a_1}{1,5r} \\ \varepsilon_4 &= \frac{a_1}{r} \\ a_{C_4} &= a_1 \\ a_5 &= a_1\end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned}\Phi_1^u &= 4ma_1 \\ M_2^u &= 8mr^2 \frac{a_1}{1,5r} = 5,33mra_1 \\ \Phi_4^u &= ma_1 \\ M_4^u &= 0,5mr^2 \frac{a_1}{r} = 0,5mra_1 \\ \Phi_5^u &= 2ma_1\end{aligned}$$

Направление главных векторов и главных моментов
инерции противоположно ускорениям

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=2m$; $m_3=0$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_2=3r$; $r_2=1,5r$; радиус инерции шкива $i_2=2r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 5 о наклонную
 плоскость $f=0,2$;

Найти: a_1 , T_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Сообщим системе возможное перемещение.
 За независимое перемещение принимаем δs_1

Сумма элементарных работ активных сил на
возможном перемещении системы

$$\sum \delta A_k^a = \delta A_{G_1} + \delta A_{G_4} + \delta A_{G_5} + \delta A_{F_{mp5}}$$

$$\delta A_{G_1} = +G_1 \cdot \delta s_1 = +m_1 g \cdot \delta s_1 = +4mg \cdot \delta s_1$$

$$\delta A_{G_4} = -G_4 \cdot \delta s_{C_4} \cdot \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} m_4 g \cdot \delta s_{C_4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} mg \cdot \delta s_{C_4}$$

$$\delta A_{G_5} = -G_5 \cdot \delta s_5 \cdot \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} m_5 g \cdot \delta s_5 = -\sqrt{3} mg \cdot \delta s_5$$

$$\delta A_{F_{mp5}} = -F_{mp5} \cdot \delta s_5 = -0,5 f m_5 g \cdot \delta s_5 = -fmg \cdot \delta s_5$$

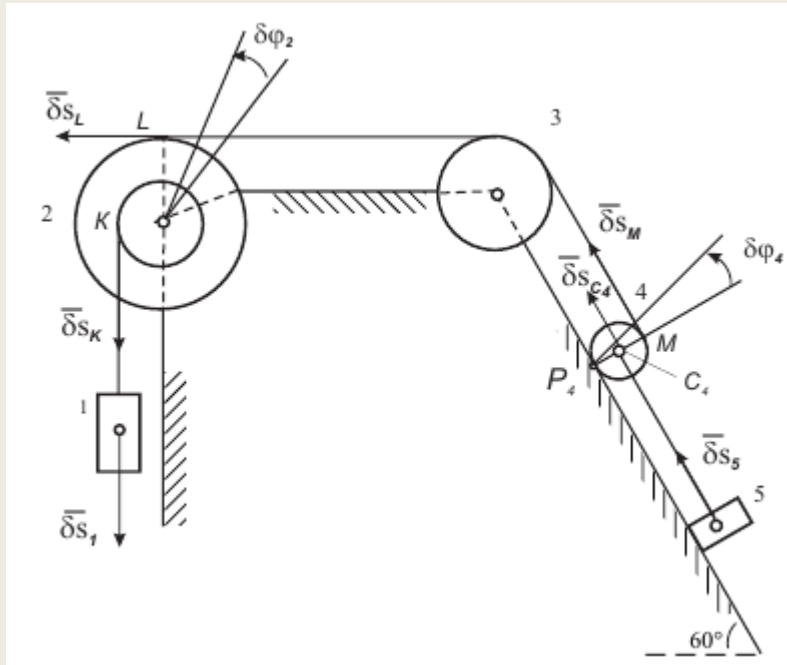
Сила трения скольжения по закону Кулона равна:

$$F_{mp5} = f \cdot N_5 = f \cdot G_5 \cdot \cos 60^\circ = 0,5 f m_5 g$$

Сумма элементарных работ активных сил :

$$\sum \delta A_k^a = +4mg \cdot \delta s_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} mg \cdot \delta s_{C_4} - \sqrt{3} mg \cdot \delta s_5 - fmg \cdot \delta s_5$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=2m$; $m_3=0$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_2=3r$; $r_2=1,5r$; радиус инерции шкива $i_2=2r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 5 о наклонную
 плоскость $f=0,2$;

Найти: a_1 , T_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Сообщим системе возможное перемещение.
 За независимое перемещение принимаем δs_1

Соотношения между перемещениями:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{1,5r}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{a_1}{r}$$

$$a_{C_4} = a_1$$

$$a_5 = a_1$$



$$a_i \Rightarrow \delta s_i$$

$$\varepsilon_i \Rightarrow \delta \varphi_i$$

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta s_1}{1,5r}$$

$$\delta \varphi_4 = \frac{\delta s_1}{r}$$

$$\delta s_{C_4} = \delta s_1$$

$$\delta s_5 = \delta s_1$$

Примечание: соотношения между ускорениями и возможными перемещениями подчиняются одним и тем же кинематическим соотношениям

Сумма элементарных работ активных сил :

$$\sum \delta A_k^a = +4mg \cdot \delta s_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} mg \cdot \delta s_{C_4} - \sqrt{3} mg \cdot \delta s_5 - fmg \cdot \delta s_5$$

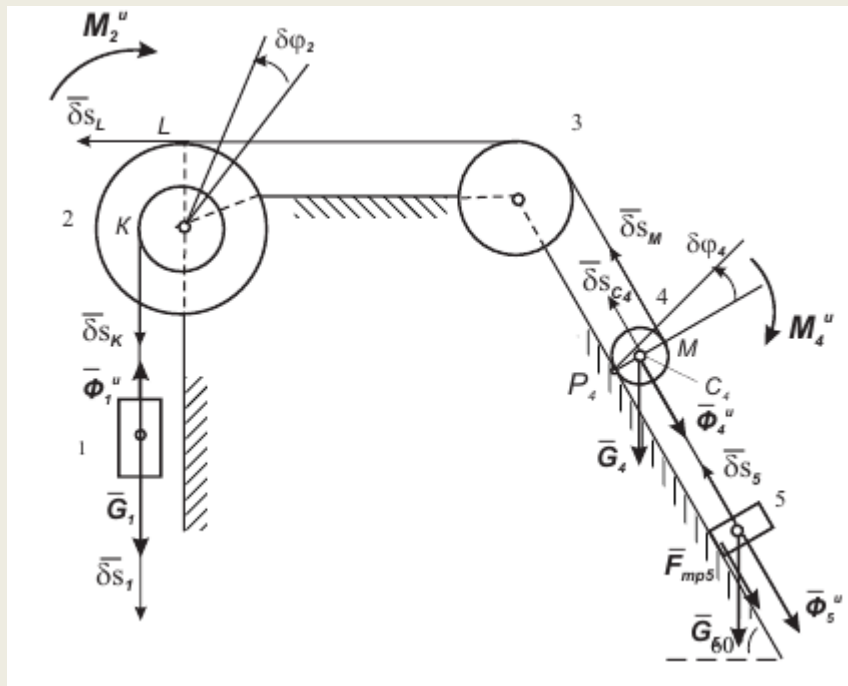
**Сумма элементарных работ активных сил
с учетом соотношений между перемещениями:**

$$\sum \delta A_k^a = +4mg \cdot \delta s_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} mg \cdot \delta s_1 - \sqrt{3} mg \cdot \delta s_1 - fmg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^a = \left(4 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - 0,2 \right) mg \cdot \delta s_1 = 1,202 mg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^a = 1,202 mg \cdot \delta s_1$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=2m$; $m_3=0$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_2=3r$; $r_2=1,5r$; радиус инерции шкива $i_2=2r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 5 о наклонную
 плоскость $f=0,2$;

Найти: a_1 , T_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

**Сумма элементарных работ сил инерции
на возможном перемещении системы**

$$\sum \delta A_k^u = \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{\Phi_4^u} + \delta A_{M_4^u} + \delta A_{\Phi_5^u}$$

$$\delta A_{\Phi_1^u} = -\Phi_1^u \cdot \delta s_1 = -4ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$\delta A_{M_2^u} = -M_2^u \cdot \delta \varphi_2 = -5,33mra_1 \cdot \delta \varphi_2$$

$$\delta A_{\Phi_4^u} = -\Phi_4^u \cdot \delta s_{C_4} = -ma_1 \cdot \delta s_{C_4}$$

$$\delta A_{M_4^u} = -M_4^u \cdot \delta \varphi_4 = -0,5mra_1 \cdot \delta \varphi_4$$

$$\delta A_{\Phi_5^u} = -\Phi_5^u \cdot \delta s_5 = -2ma_1 \cdot \delta s_5$$

$$\Phi_1^u = 4ma_1$$

$$M_2^u = 5,33mra_1$$

$$\Phi_4^u = ma_1$$

$$M_4^u = 0,5mra_1$$

$$\Phi_5^u = 2ma_1$$

Сумма элементарных работ сил инерции

с учетом соотношений между перемещениями:

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta s_1}{1,5r}$$

$$\delta \varphi_4 = \frac{\delta s_1}{r}$$

$$\delta s_{C_4} = \delta s_1$$

$$\delta s_5 = \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^u = \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{\Phi_4^u} + \delta A_{M_4^u} + \delta A_{\Phi_5^u} =$$

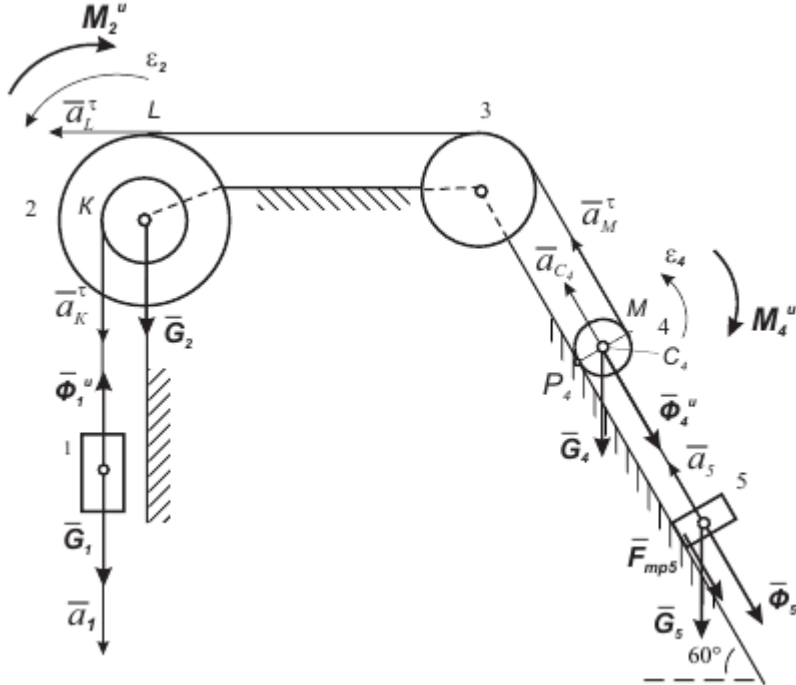
$$= -4ma_1 \cdot \delta s_1 - 5,33mra_1 \cdot \frac{\delta s_1}{1,5r} - ma_1 \cdot \delta s_1 -$$

$$- 0,5mra_1 \cdot \frac{\delta s_1}{r} - 2ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^u = (-4 - 3,553 - 1 - 0,5 - 2)ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^u = -11,053ma_1 \cdot \delta s_1$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=2m$; $m_3=0$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_2=3r$; $r_2=1,5r$; радиус инерции шкива $i_2=2r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 5 о наклонную
 плоскость $f=0,2$;

Найти: a_1 , T_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

общее уравнение динамики примет вид:

$$\delta A_{G_1} + \delta A_{G_4} + \delta A_{G_5} + \delta A_{F_{mp5}} + \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{\Phi_4^u} + \delta A_{M_4^u} + \delta A_{\Phi_5^u} = 0$$

$$\sum \delta A_k^a = 1,202mg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^u = -11,053ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$1,202mg \cdot \delta s_1 - 11,053ma_1 \cdot \delta s_1 = 0$$

$$1,202mg \cdot \delta s_1 - 11,053ma_1 \cdot \delta s_1 = 0$$

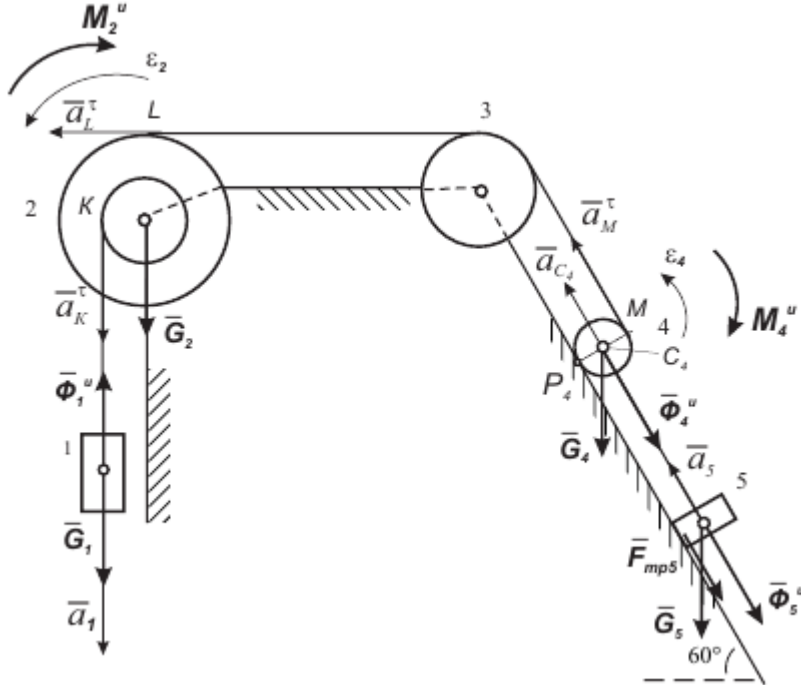
$$[1,202g - 11,053a_1] \cdot m \cdot \delta s_1 = 0$$

$$[1,202g - 11,053a_1] = 0$$

$$a_1 = \frac{1,202g}{11,053} = 0,1087g = 1,067 \text{ м/с}^2$$

Примечание: Положительное значение ускорения говорит о том, что его выбранное направление соответствует действительному. Отрицательный знак говорит о том, что ускорения направлены в противоположную сторону. В случае отрицательного результата, необходимо поменять направление ускорений системы и пересчитать элементарные работы заново для нового направления.

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=2m$; $m_3=0$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_2=3r$; $r_2=1,5r$; радиус инерции шкива $i_2=2r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 5 о наклонную
 плоскость $f=0,2$;

Найти: a_1 , T_1

Определение силы натяжения нити
по методу кинестатики

Уравнение кинестатики
для груза 1:

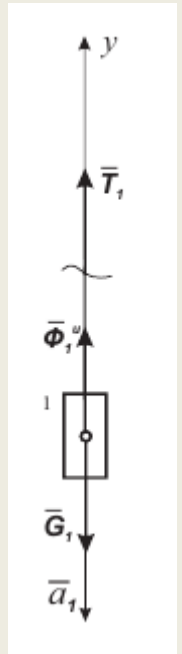
$$\sum F_{ky} = 0 \Rightarrow T_1 + \Phi_1^u - G_1 = 0$$

$$T_1 = -\Phi_1^u + G_1 = -m_1 a_1 + m_1 g$$

$$T_1 = 4m(g - a_1) = 4 \cdot 1 \text{ кг} \cdot (9,81 - 1,067) \text{ м/с}^2 = 34,972 \text{ Н}$$

Примечание: Сила натяжения нити может быть
только положительной

Ответ: $a_1 = 1,067 \text{ м/с}^2$, $T_1 = 34,972 \text{ Н}$



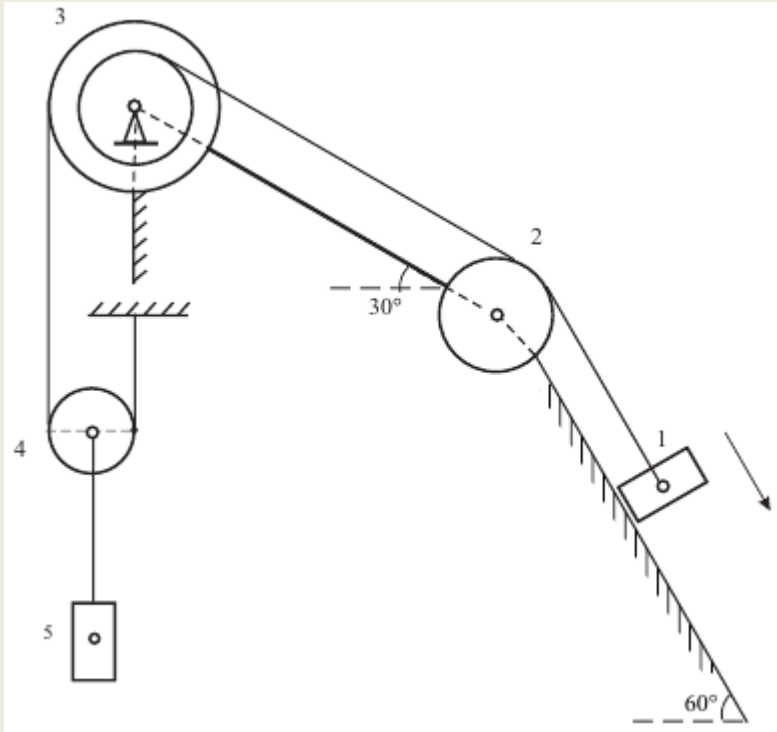
Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями

Задача 2

Механическая система состоит из грузов 1 и 5, невесомого блока 2, ступенчатого шкива 3 и подвижного блока 4 (сплошной однородный цилиндр). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми невесомыми нитями.

Система движется в вертикальной плоскости под действием сил тяжести. Проскальзывания нити по поверхности подвижного блока нет.

Определить ускорение груза 1 и силу натяжения нити.



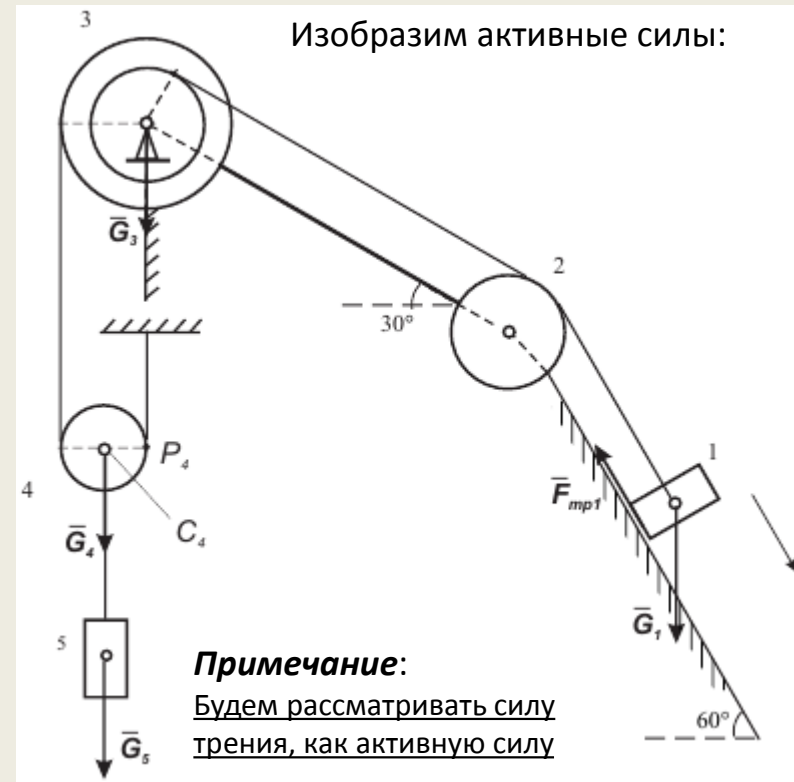
Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=0$; $m_3=2m$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_3=3r$; $r_3=2r$; радиус инерции шкива $i_3=\sqrt{3} r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 1 о плоскость $f=0,2$;

Найти: a_1 , T_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

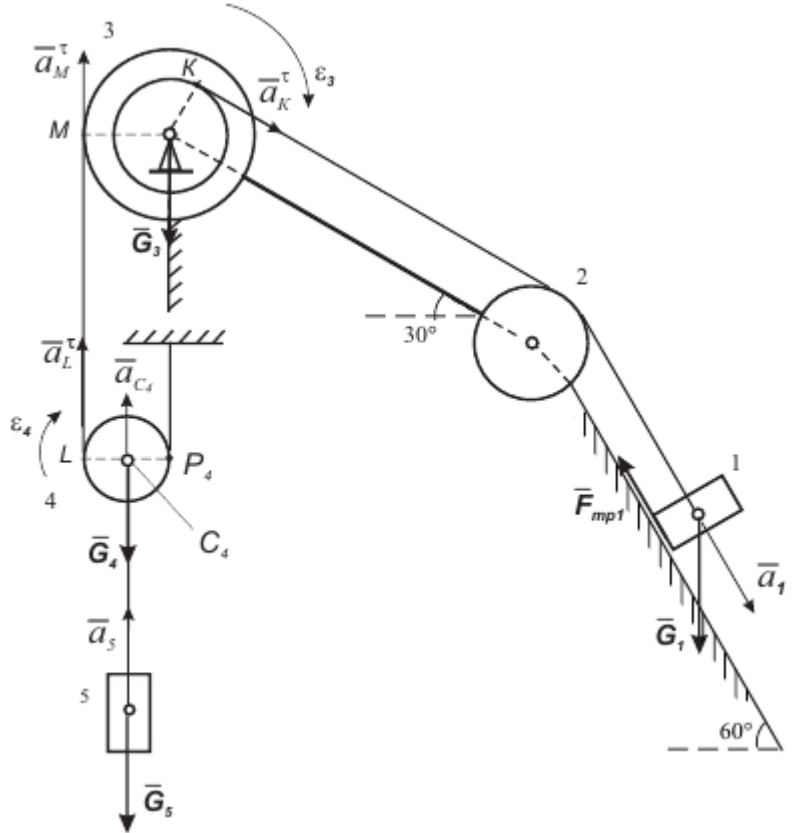
$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$



Примечание:

Будем рассматривать силу трения, как активную силу

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Решение

Выбираем направление ускорения груза 1 - вниз

Соотношения между ускорениями:

$$a_K^\tau = a_1$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_K^\tau}{r_3} = \frac{a_1}{2r}$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = \frac{a_1}{2r} \cdot 3r = 1,5a_1$$

$$a_L^\tau = a_M^\tau = 1,5a_1$$

$$\varepsilon_4 = \frac{a_L^\tau}{LP_4} = \frac{1,5a_1}{2r} = 0,75 \frac{a_1}{r}$$

$$a_{C_4} = \varepsilon_4 \cdot C_4P_4 = 0,75 \frac{a_1}{r} \cdot r = 0,75 a_1$$

$$a_5 = a_{C_4} = 0,75 a_1$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= \frac{a_1}{2r} \\ \varepsilon_4 &= 0,75 \frac{a_1}{r} \\ a_{C_4} &= 0,75 a_1 \\ a_5 &= 0,75 a_1 \end{aligned}$$

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m; m_5=2m; m=1 \text{ кг};$$

$$R_3=3r; r_3=2r; \text{ радиус инерции шкива } i_3=\sqrt{3} \cdot r; r_4=r;$$

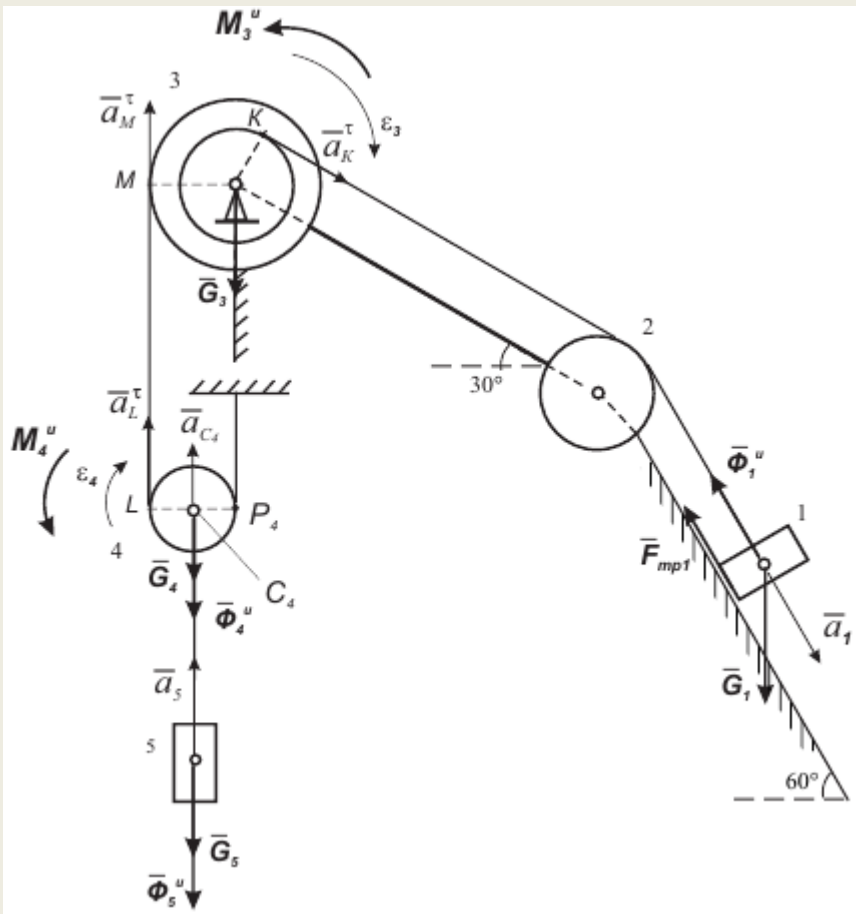
$$\text{коэффициент трения груза 1 о плоскость } f=0,2;$$

Найти: a_1, T_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Главные векторы и главные моменты сил инерции:

Груз 1 совершает поступательное движение

$$\Phi_1^u = m_1 a_1$$

Шкив 3 совершает вращательное движение

$$M_3^u = J_3 \varepsilon_3$$

Момент инерции шкива 3

$$J_3 = m_3 i_3^2 = 6 m r^2$$

Блок 4 совершает плоскопараллельное движение
(C_4 – центр масс, P_4 – мгновенный центр скоростей)

$$\Phi_4^u = m_4 a_{C_4} \quad M_4^u = J_4 \varepsilon_4$$

Момент инерции блока 4

$$J_4 = \frac{1}{2} m_4 r_4^2 = 0,5 m r^2$$

Груз 5 совершает поступательное движение

$$\Phi_5^u = m_5 a_5$$

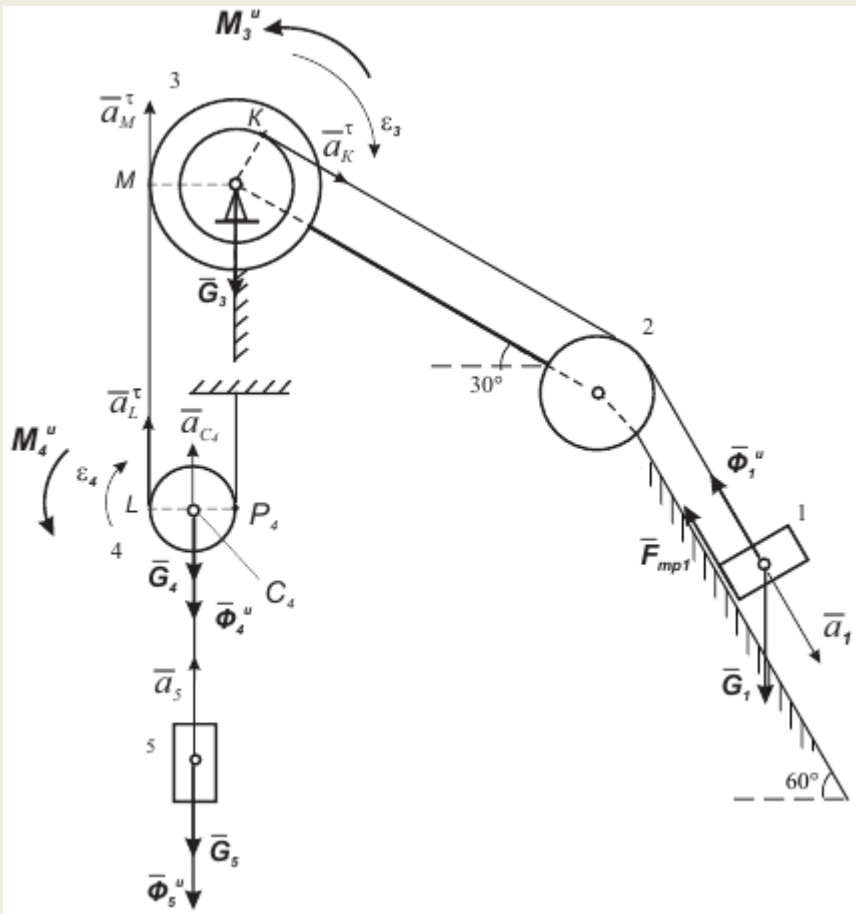
Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=0$; $m_3=2m$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_3=3r$; $r_3=2r$; радиус инерции шкива $i_3= \sqrt{3} r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 1 о плоскость $f=0,2$;
 Найти: a_1 , T_1

Направление главных векторов и главных моментов инерции противоположно ускорениям

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями: $\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Главные векторы и главные моменты сил инерции с учетом соотношений между массово-инерционными характеристиками:

$$\begin{aligned}\Phi_1^u &= 4ma_1 & M_3^u &= 6mr^2\varepsilon_3 \\ \Phi_4^u &= ma_{C_4} & M_4^u &= 0,5mr^2\varepsilon_4 \\ \Phi_5^u &= 2ma_5\end{aligned}$$

Главные векторы и главные моменты сил инерции с учетом соотношений между ускорениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_3 &= \frac{a_1}{2r} & \Phi_1^u &= 4ma_1 \\ \varepsilon_4 &= 0,75\frac{a_1}{r} & M_3^u &= 6mr^2\frac{a_1}{2r} = 3mr a_1 \\ a_{C_4} &= 0,75a_1 & \Phi_4^u &= 0,75ma_1 \\ a_5 &= 0,75a_1 & M_4^u &= 0,5mr^2 0,75\frac{a_1}{r} = 0,375mr a_1 \\ & & \Phi_5^u &= 1,5ma_1\end{aligned}$$

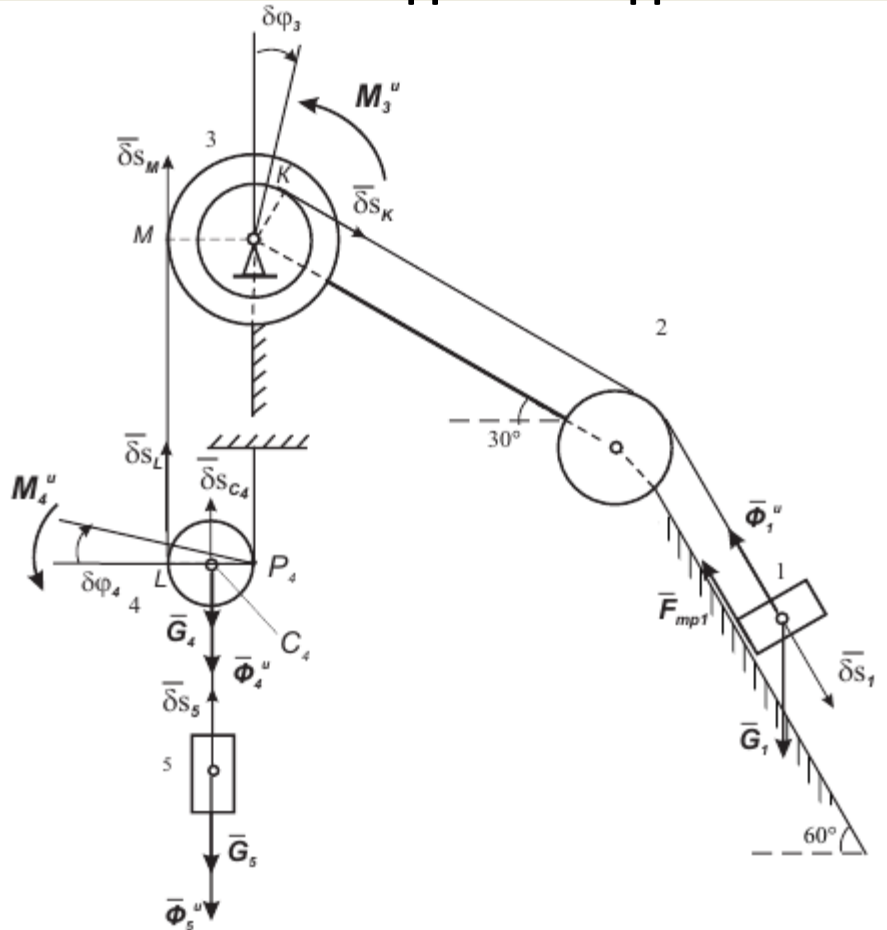
Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=0$; $m_3=2m$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_3=3r$; $r_3=2r$; радиус инерции шкива $i_3= \sqrt{3} r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 1 о плоскость $f=0,2$;
 Найти: a_1 , T_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями: $\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$

Направление главных векторов и главных моментов инерции противоположно ускорениям

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=0$; $m_3=2m$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_3=3r$; $r_3=2r$; радиус инерции шкива $i_3=\sqrt{3} r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 1 о плоскость $f=0,2$;
 Найти: a_1 , T_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Сообщим системе возможное перемещение.
 За независимое перемещение принимаем δs_1

Сумма элементарных работ активных сил на возможном перемещении системы

$$\sum \delta A_k^a = \delta A_{G_1} + \delta A_{F_{mp1}} + \delta A_{G_4} + \delta A_{G_5}$$

$$\delta A_{G_1} = +G_1 \cdot \delta s_1 \cdot \sin 60^\circ = +\frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g \cdot \delta s_1 = +2\sqrt{3} mg \cdot \delta s_1$$

$$\delta A_{F_{mp1}} = -F_{mp1} \cdot \delta s_1 = -0,5 f m_1 g \cdot \delta s_1 = -2 f mg \cdot \delta s_1$$

$$\delta A_{G_4} = -G_4 \cdot \delta s_{C_4} = -m_4 g \cdot \delta s_{C_4} = -mg \cdot \delta s_{C_4}$$

$$\delta A_{G_5} = -G_5 \cdot \delta s_5 = -m_5 g \cdot \delta s_5 = -2mg \cdot \delta s_5$$

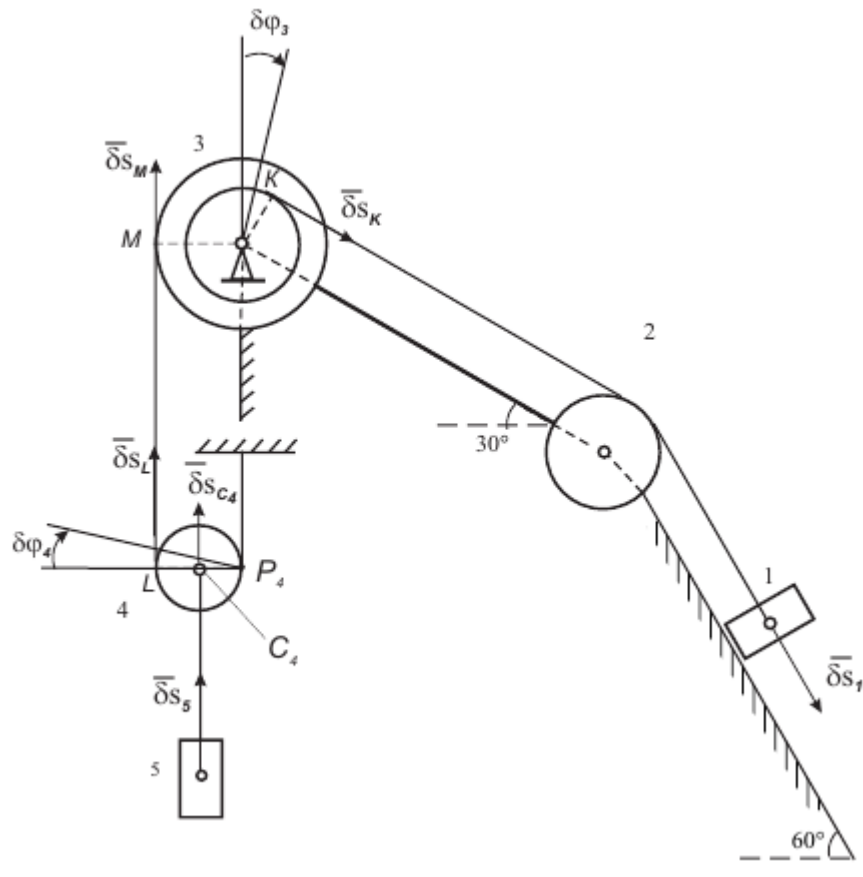
Сила трения скольжения по закону Кулона равна:

$$F_{mp1} = f \cdot N_1 = f \cdot G_1 \cdot \cos 60^\circ = 0,5 f m_1 g$$

Сумма элементарных работ активных сил :

$$\sum \delta A_k^a = +2\sqrt{3} mg \cdot \delta s_1 - 2 f mg \cdot \delta s_1 - mg \cdot \delta s_{C_4} - 2mg \cdot \delta s_5$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Сообщим системе возможное перемещение.
За независимое перемещение принимаем δs_1

Соотношения между перемещениями:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{2r}$$

$$\varepsilon_4 = 0,75 \frac{a_1}{r}$$

$$a_{C_4} = 0,75 a_1$$

$$a_5 = 0,75 a_1$$



$$a_i \Rightarrow \delta s_i$$

$$\varepsilon_i \Rightarrow \delta \varphi_i$$

$$\delta \varphi_3 = 0,5 \frac{\delta s_1}{r}$$

$$\delta \varphi_4 = 0,75 \frac{\delta s_1}{r}$$

$$\delta s_{C_4} = 0,75 \delta s_1$$

$$\delta s_5 = 0,75 \delta s_1$$

Примечание: соотношения между ускорениями и возможными перемещениями подчиняются одним и тем же кинематическим соотношениям

Сумма элементарных работ активных сил :

$$\sum \delta A_k^a = +2\sqrt{3}mg \cdot \delta s_1 - 2fmg \cdot \delta s_1 - mg \cdot \delta s_{C_4} - 2mg \cdot \delta s_5$$

**Сумма элементарных работ активных сил
с учетом соотношений между перемещениями:**

$$\sum \delta A_k^a = +2\sqrt{3}mg \cdot \delta s_1 - 2fmg \cdot \delta s_1 - 0,75mg \cdot \delta s_1 - 1,5mg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^a = (+2\sqrt{3} - 0,4 - 0,75 - 1,5)mg \cdot \delta s_1 = 0,814mg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^a = 0,814mg \cdot \delta s_1$$

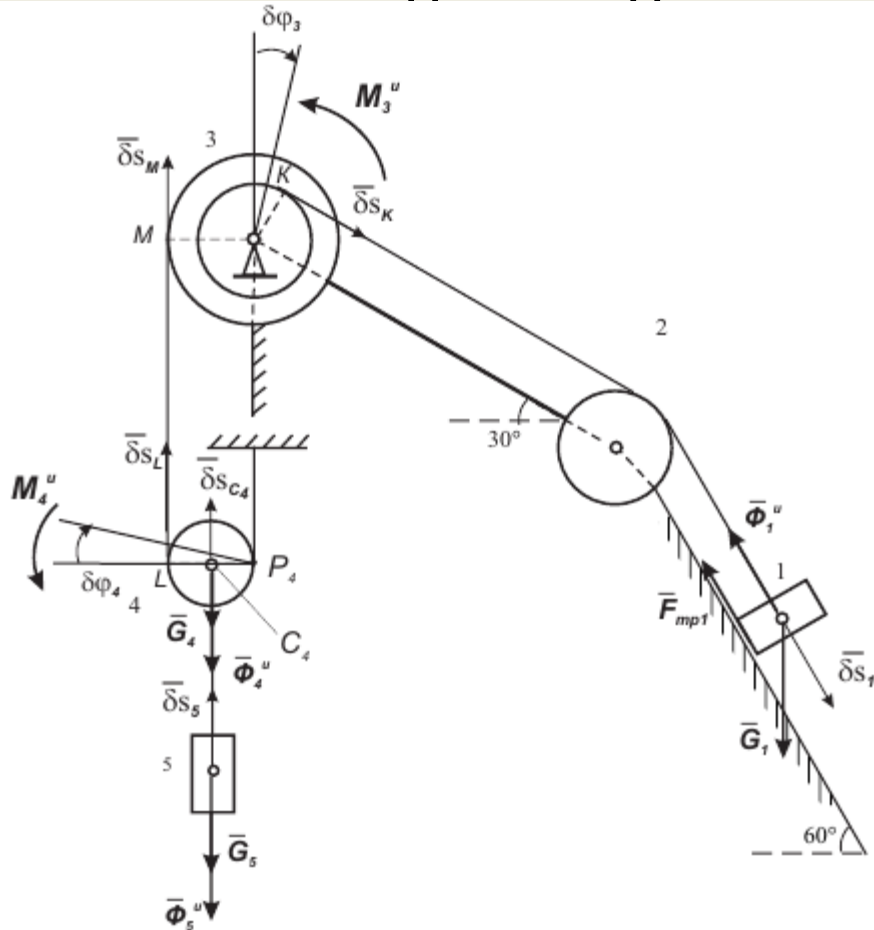
Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=0$; $m_3=2m$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_3=3r$; $r_3=2r$; радиус инерции шкива $i_3=\sqrt{3} r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 1 о плоскость $f=0,2$;
 Найти: a_1 , T_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=0$; $m_3=2m$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1$ кг;
 $R_3=3r$; $r_3=2r$; радиус инерции шкива $i_3=\sqrt{3} r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 1 о плоскость $f=0,2$;
 Найти: a_1 , T_1

**Сумма элементарных работ сил инерции
на возможном перемещении системы**

$$\sum \delta A_k^u = \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_3^u} + \delta A_{\Phi_4^u} + \delta A_{M_4^u} + \delta A_{\Phi_5^u}$$

$$\delta A_{\Phi_1^u} = -\Phi_1^u \cdot \delta s_1 = -4ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$\delta A_{M_3^u} = -M_3^u \cdot \delta \varphi_3 = -3mr a_1 \cdot \delta \varphi_3$$

$$\delta A_{\Phi_4^u} = -\Phi_4^u \cdot \delta s_{C_4} = -0,75ma_1 \cdot \delta s_{C_4}$$

$$\delta A_{M_4^u} = -M_4^u \cdot \delta \varphi_4 = -0,375mr a_1 \cdot \delta \varphi_4$$

$$\delta A_{\Phi_5^u} = -\Phi_5^u \cdot \delta s_5 = -1,5ma_1 \cdot \delta s_5$$

$$\Phi_1^u = 4ma_1$$

$$M_3^u = 3mr a_1$$

$$\Phi_4^u = 0,75ma_1$$

$$M_4^u = 0,375mr a_1$$

$$\Phi_5^u = 1,5ma_1$$

**Сумма элементарных работ сил инерции
с учетом соотношений между перемещениями:**

$$\begin{aligned} \sum \delta A_k^u &= \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_3^u} + \delta A_{\Phi_4^u} + \delta A_{M_4^u} + \delta A_{\Phi_5^u} = \\ &= -4ma_1 \cdot \delta s_1 - 3mr a_1 \cdot 0,5 \frac{\delta s_1}{r} - 0,75ma_1 \cdot 0,75 \delta s_1 - \\ &\quad - 0,375ma_1 \cdot 0,75 \frac{\delta s_1}{r} - 1,5ma_1 \cdot 0,75 \delta s_1 \end{aligned}$$

$$\sum \delta A_k^u = (-4 - 1,5 - 0,563 - 0,281 - 1,125)ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$\boxed{\sum \delta A_k^u = -7,469ma_1 \cdot \delta s_1}$$

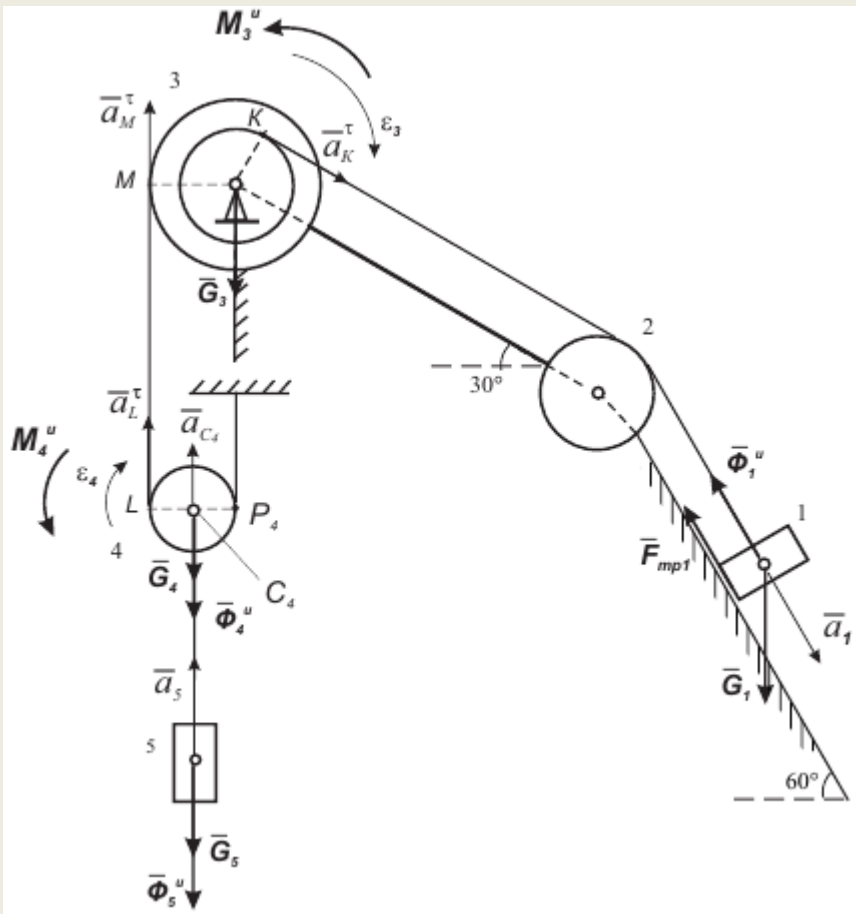
$$\delta \varphi_3 = 0,5 \frac{\delta s_1}{r}$$

$$\delta \varphi_4 = 0,75 \frac{\delta s_1}{r}$$

$$\delta s_{C_4} = 0,75 \delta s_1$$

$$\delta s_5 = 0,75 \delta s_1$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



общее уравнение динамики примет вид:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

$$\delta A_{G_1} + \delta A_{F_{mp1}} + \delta A_{G_4} + \delta A_{G_5} + \delta A_{\phi_1^u} + \delta A_{M_3^u} + \delta A_{\phi_4^u} + \delta A_{M_4^u} + \delta A_{\phi_5^u} = 0$$

$$\sum \delta A_k^a = 0,814mg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^u = -7,469ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$0,814mg \cdot \delta s_1 - 7,469ma_1 \cdot \delta s_1 = 0$$

$$[0,814 \cdot g - 7,469 \cdot a_1]m \cdot \delta s_1 = 0$$

Приравняем нулю выражение в квадратных скобках:

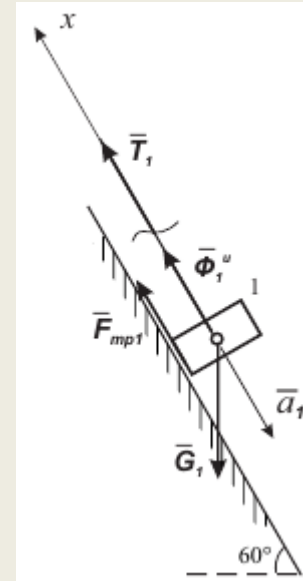
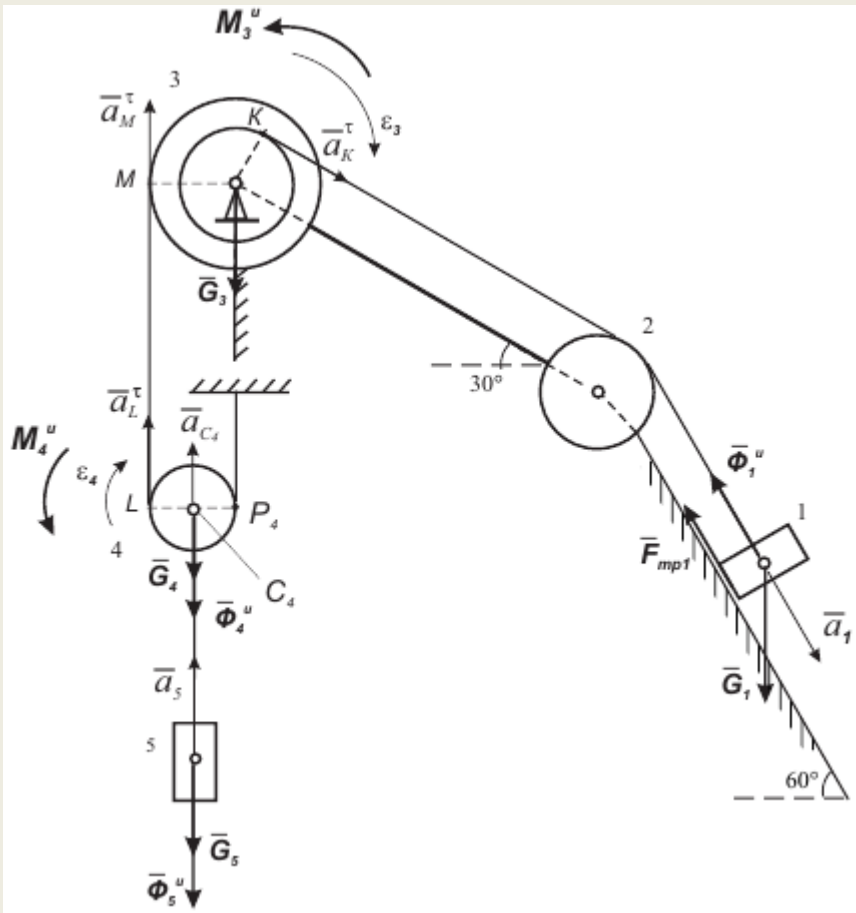
$$[0,814 \cdot g - 7,469 \cdot a_1] = 0$$

$$a_1 = \frac{0,814 \cdot g}{7,469} = 0,1090g = 1,069 \text{ м/с}^2$$

Примечание: Положительное значение ускорения говорит о том, что его выбранное направление соответствует действительному. Отрицательный знак говорит о том, что ускорения направлены в противоположную сторону. В случае отрицательного результата, необходимо поменять направление ускорений системы и пересчитать элементарные работы заново для нового направления.

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями

Определение силы натяжения нити
по методу кинестатики



Уравнение кинестатики для груза 1:

$$\sum F_{kx} = 0 \Rightarrow T_1 + \Phi_1^u - G_1 \sin 60^\circ + F_{mp1} = 0$$

$$T_1 = -\Phi_1^u + G_1 \sin 60^\circ - F_{mp1} = -m_1 a_1 + m_1 g \sin 60^\circ - m_1 g \cdot f \cos 60^\circ$$

$$T_1 = 4m \left(g \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,2 \cdot 0,5 \right) - a_1 \right) = 4 \cdot 1 \text{ кг} \cdot (9,81 \cdot 0,766 - 1,069) \cdot \text{м/с}^2 = 25,781 \text{ Н}$$

Примечание: Сила натяжения нити может быть только положительной

Исходные данные:

$m_1=4m$; $m_2=0$; $m_3=2m$; $m_4=m$; $m_5=2m$; $m=1 \text{ кг}$;
 $R_3=3r$; $r_3=2r$; радиус инерции шкива $i_3=\sqrt{3} \cdot r$; $r_4=r$;
 коэффициент трения груза 1 о плоскость $f=0,2$;
 Найти: a_1 , T_1

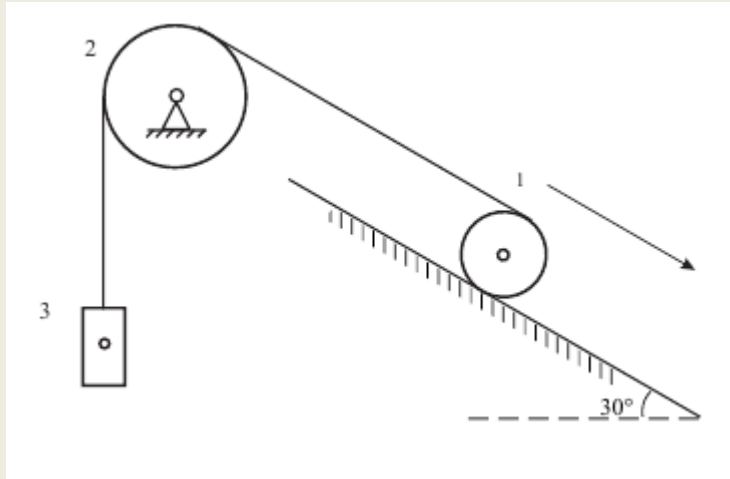
Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Ответ: $a_1 = 1,069 \text{ м/с}^2$, $T_1 = 25,781 \text{ Н}$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями

Задача 1



Механическая система состоит из катка 1 (сплошной однородный цилиндр), груза 3, блока 2 (масса равномерно распределена по ободу). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимой невесомой нитью.

Под действием сил тяжести механическая система приходит в движение из состояния покоя. Каток катится по шероховатой наклонной плоскости без проскальзывания

Определить ускорение катка 1

Изобразим активные силы:

Исходные данные:

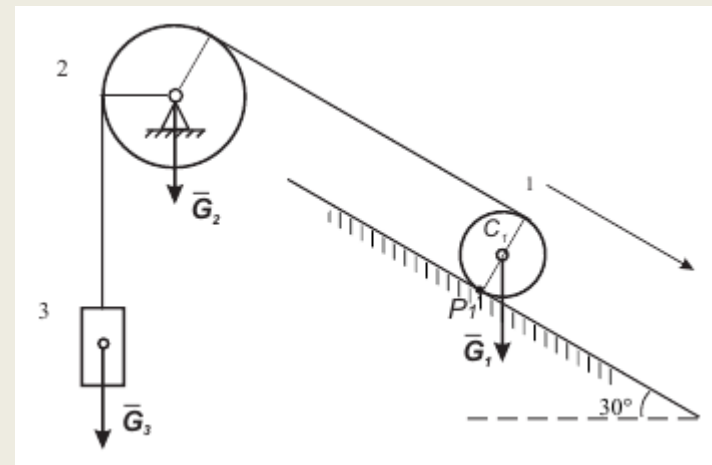
$$m_1=12m; m_2=m; m_3=2m;$$

$$R_2=1,6r; r_1=r$$

Найти: a_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$



Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями

Решение

Выбираем направление ускорения центра масс катка 1 –
вниз вдоль наклонной плоскости

Соотношения между ускорениями:

$$a_{C_1} = a_1$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{C_1}}{C_1 P_1} = \frac{a_{C_1}}{r_1} = \frac{a_1}{r}$$

$$a_L^\tau = \varepsilon_1 \cdot P_1 L = \frac{a_1}{r} \cdot 2r = 2a_1$$

$$a_K^\tau = a_L^\tau = 2a_1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_K^\tau}{R_2} = \frac{2a_1}{1,6r} = 1,25 \frac{a_1}{r}$$

$$a_3 = a_K^\tau = 2a_1$$

$$a_{C_1} = a_1$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1}{r}$$

$$\varepsilon_2 = 1,25 \frac{a_1}{r}$$

$$a_3 = 2a_1$$

Исходные данные:

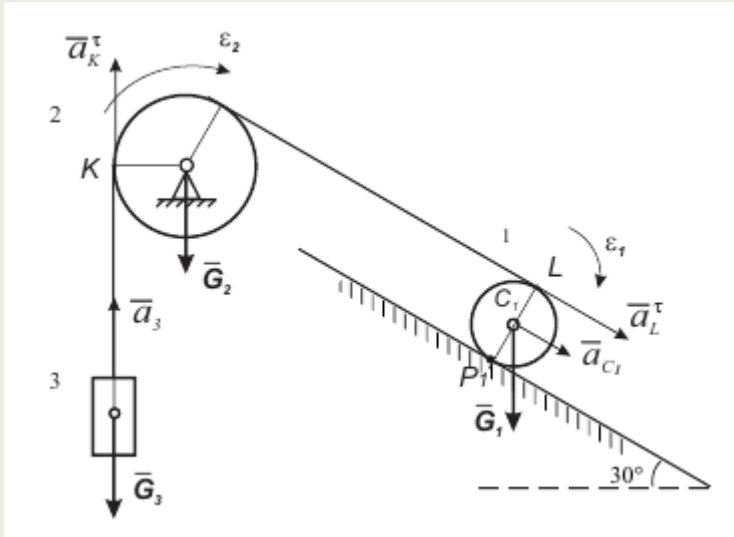
$$m_1 = 12m; m_2 = m; m_3 = 2m;$$

$$R_2 = 1,6r; r_1 = r$$

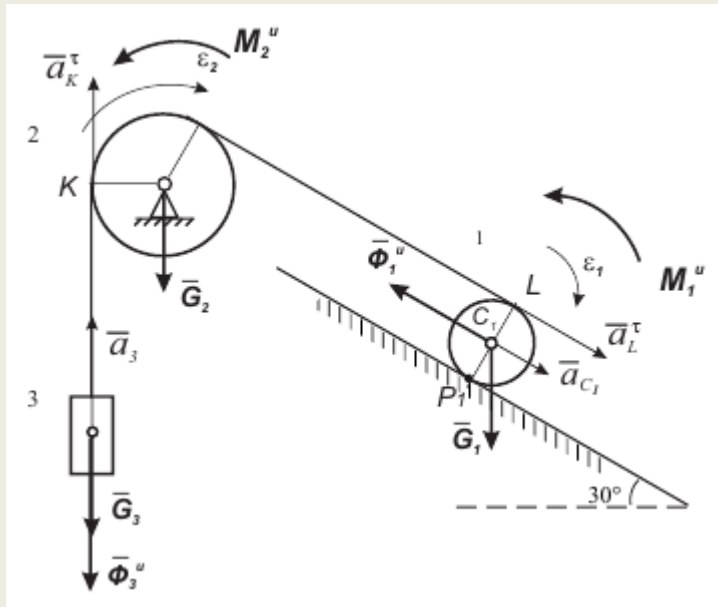
Найти: a_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$



Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=12m; m_2=m; m_3=2m;$$

$$R_2=1,6r; r_1=r$$

Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Главные векторы и главные моменты сил инерции:

Каток 1 совершает плоскопараллельное движение (C_1 – центр масс, P_1 – мгновенный центр скоростей)

$$\Phi_1^u = m_1 a_{C_1} \quad M_1^u = J_1 \varepsilon_1$$

Момент инерции катка

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 = 6 m r^2$$

Блок 2 совершает вращательное движение

$$M_2^u = J_2 \varepsilon_2$$

Момент инерции блока

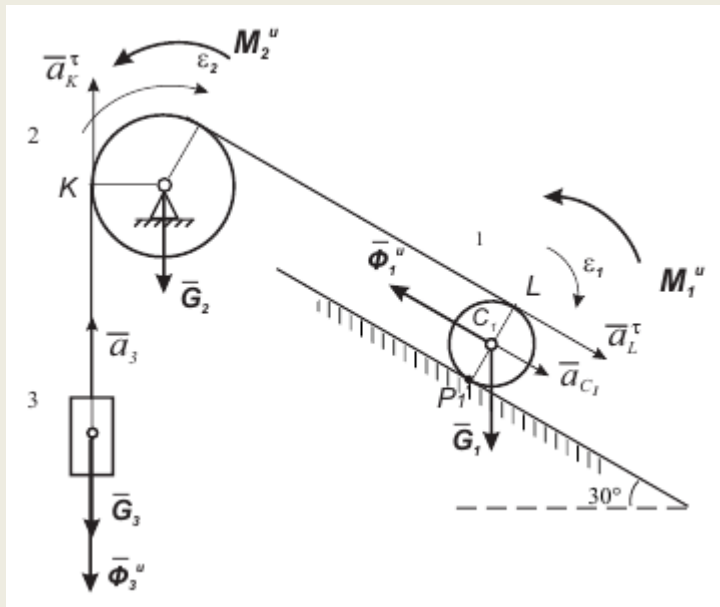
$$J_2 = m_2 R_2^2 = m (1,6r)^2 = 2,56 m r^2$$

Груз 3 совершает поступательное движение

$$\Phi_3^u = m_3 a_3$$

Направление главных векторов и главных моментов инерции противоположно ускорениям

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=12m; m_2=m; m_3=2m;$$

$$R_2=1,6r; r_1=r$$

Найти: a_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

**Главные векторы и главные моменты сил инерции
с учетом соотношений между массово-инерционными
характеристиками:**

$$\Phi_1^u = 12ma_{C_1} \quad M_1^u = 6mr^2 \varepsilon_1$$

$$\Phi_3^u = 2ma_3 \quad M_2^u = 2,56mr^2 \varepsilon_2$$

**Главные векторы и главные моменты сил инерции
с учетом соотношений между ускорениями:**

$$a_{C_1} = a_1$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1}{r}$$

$$\varepsilon_2 = 1,25 \frac{a_1}{r}$$

$$a_3 = 2a_1$$

$$\Phi_1^u = 12ma_1$$

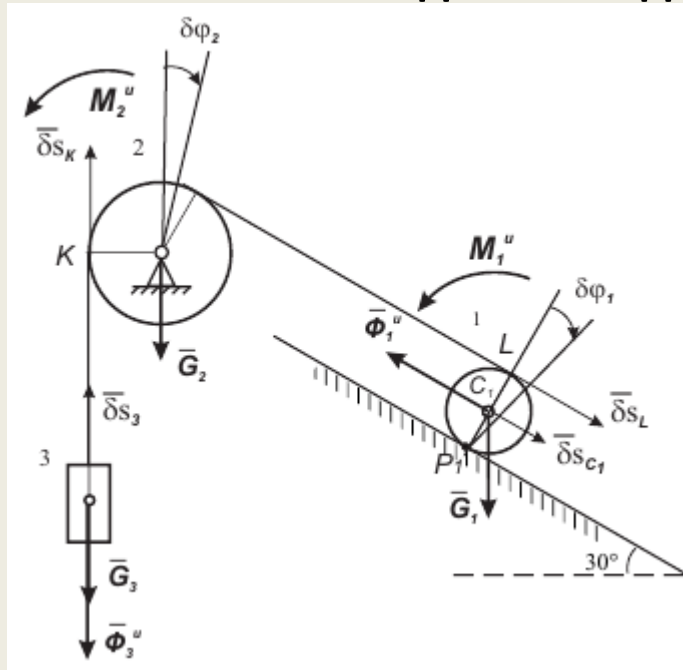
$$M_1^u = 6mr^2 \frac{a_1}{r} = 6mra_1$$

$$\Phi_3^u = 4ma_1$$

$$M_2^u = 2,56mr^2 1,25 \frac{a_1}{r} = 3,2mra_1$$

Направление главных векторов и главных моментов
инерции противоположно ускорениям

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=12m; m_2=m; m_3=2m;$$

$$R_2=1,6r; r_1=r$$

Найти: a_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Сообщим системе возможное перемещение.
За независимое перемещение принимаем δs_1

Сумма элементарных работ активных сил на
возможном перемещении системы

$$\sum \delta A_k^e = \delta A_{G_1} + \delta A_{G_3}$$

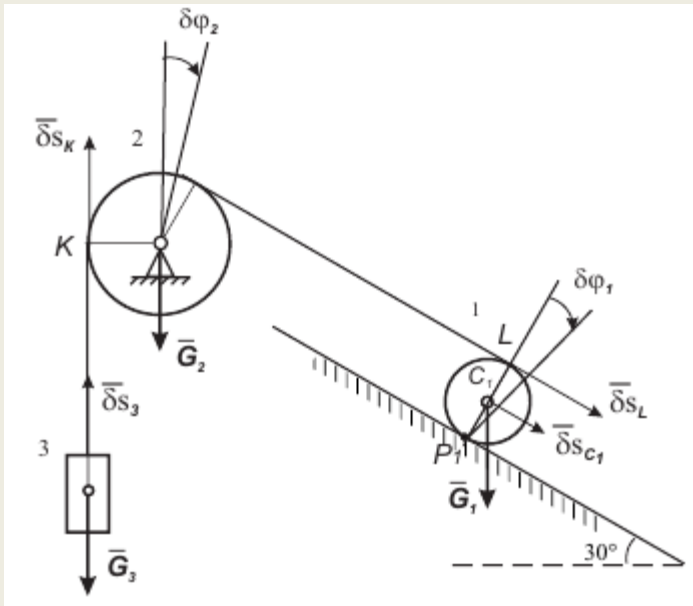
$$\delta A_{G_1} = +G_1 \cdot \delta s_1 \cdot \sin 30^\circ = +0,5m_1g \cdot \delta s_1 = +6mg \cdot \delta s_1$$

$$\delta A_{G_3} = -G_3 \cdot \delta s_3 = -m_3g \cdot \delta s_3 = -2mg \cdot \delta s_3$$

Сумма элементарных работ активных сил :

$$\sum \delta A_k^e = +6mg \cdot \delta s_1 - 2mg \cdot \delta s_3$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=12m; m_2=m; m_3=2m;$$

$$R_2=1,6r; r_1=r$$

Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Сообщим системе возможное перемещение.
За независимое перемещение принимаем δs_1

Соотношения между перемещениями:

$$a_{C_1} = a_1$$

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1}{r}$$

$$\varepsilon_2 = 1,25 \frac{a_1}{r}$$

$$a_3 = 2a_1$$



$$a_i \Rightarrow \delta s_i$$

$$\varepsilon_i \Rightarrow \delta \varphi_i$$

$$\delta s_{C_1} = \delta s_1$$

$$\delta \varphi_1 = \frac{\delta s_1}{r}$$

$$\delta \varphi_2 = 1,25 \frac{\delta s_1}{r}$$

$$\delta s_3 = 2\delta s_1$$

Примечание: соотношения между ускорениями и возможными перемещениями подчиняются одним и тем же кинематическим соотношениям

Сумма элементарных работ активных сил :

$$\sum \delta A_k^e = +6mg \cdot \delta s_1 - 2mg \cdot \delta s_3$$

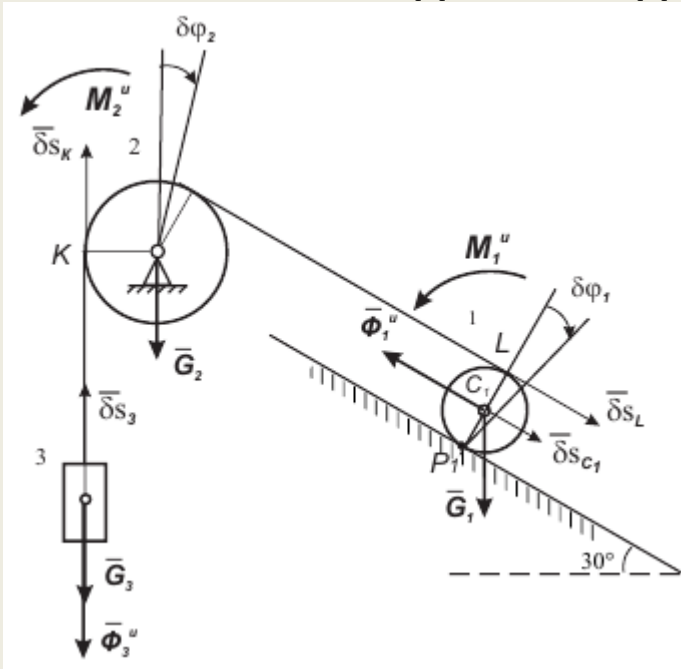
Сумма элементарных работ активных сил

с учетом соотношений между перемещениями:

$$\sum A_k^e = +6mg \cdot s_1 - 4mg \cdot s_1 = +2mg \cdot s_1$$

$$\sum \delta A_k^a = 2mg \cdot \delta s_1$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=12m; m_2=m; m_3=2m;$$

$$R_2=1,6r; r_1=r$$

Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Сумма элементарных работ сил инерции на возможном перемещении системы

$$\sum \delta A_k^u = \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_1^u} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{\Phi_3^u}$$

$$\delta A_{\Phi_1^u} = -\Phi_1^u \cdot \delta s_{C_1} = -12ma_1 \cdot \delta s_{C_1}$$

$$\delta A_{M_1^u} = -M_1^u \cdot \delta \varphi_1 = -6mra_1 \cdot \delta \varphi_1$$

$$\delta A_{M_2^u} = -M_2^u \cdot \delta \varphi_2 = -3,2mra_1 \cdot \delta \varphi_2$$

$$\delta A_{\Phi_3^u} = -\Phi_3^u \cdot \delta s_3 = -4ma_1 \cdot \delta s_3$$

$$\Phi_1^u = 12ma_1$$

$$M_1^u = 6mra_1$$

$$M_2^u = 3,2mra_1$$

$$\Phi_3^u = 4ma_1$$

Сумма элементарных работ сил инерции

с учетом соотношений между перемещениями:

$$\delta s_{C_1} = \delta s_1$$

$$\delta \varphi_1 = \frac{\delta s_1}{r}$$

$$\delta \varphi_2 = 1,25 \frac{\delta s_1}{r}$$

$$\delta s_3 = 2\delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^u = \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_1^u} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{\Phi_3^u} =$$

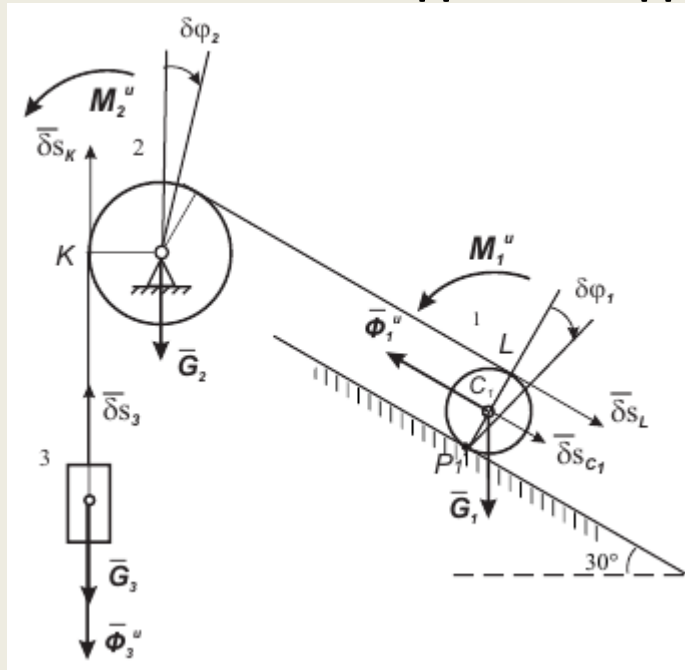
$$= -12ma_1 \cdot \delta s_1 - 6mra_1 \cdot \frac{\delta s_1}{r} -$$

$$- 3,2mra_1 \cdot 1,25 \frac{\delta s_1}{r} - 4ma_1 \cdot 2\delta s_1 =$$

$$= (-12 - 6 - 4 - 8)ma_1 \cdot \delta s_1 = -30ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$\boxed{\sum \delta A_k^u = -30ma_1 \cdot \delta s_1}$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1 = 12m; m_2 = m; m_3 = 2m;$$

$$R_2 = 1,6r; r_1 = r$$

Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

общее уравнение динамики примет вид:

$$\delta A_{G_1} + \delta A_{G_3} + \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_1^u} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{\Phi_3^u} = 0$$

$$\sum \delta A_k^a = 2mg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^u = -30ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$2mg \cdot \delta s_1 - 30ma_1 \cdot \delta s_1 = 0$$

$$[2g - 30a_1] \cdot m \cdot \delta s_1 = 0$$

$$[2g - 30a_1] = 0$$

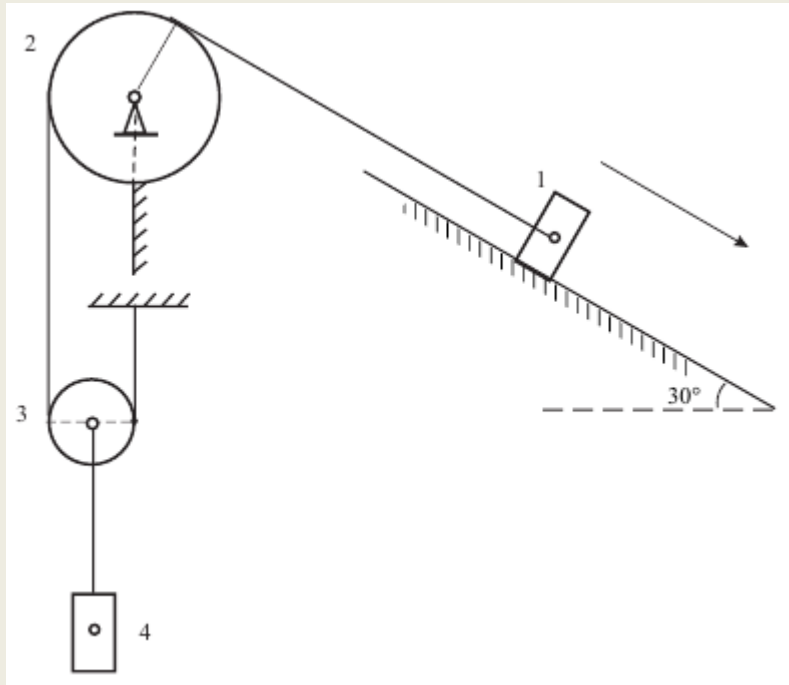
$$a_1 = \frac{2g}{30} = 0,067g = 0,654 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $a_1 = 0,654 \text{ м/с}^2$

Примечание: Положительное значение ускорения говорит о том, что его выбранное направление соответствует действительному. Отрицательный знак говорит о том, что ускорения направлены в противоположную сторону. В случае отрицательного результата, необходимо поменять направление ускорений системы и пересчитать элементарные работы заново для нового направления.

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями

Задача 2



Механическая система состоит из грузов 1 и 4, барабана 2, и подвижного блока 3 (масса равномерно распределена по ободу). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимой невесомой нитью. Под действием сил тяжести механическая система приходит в движение из состояния покоя. Проскальзывания нити по поверхности подвижного блока нет. Определить ускорение груза 1

Исходные данные:

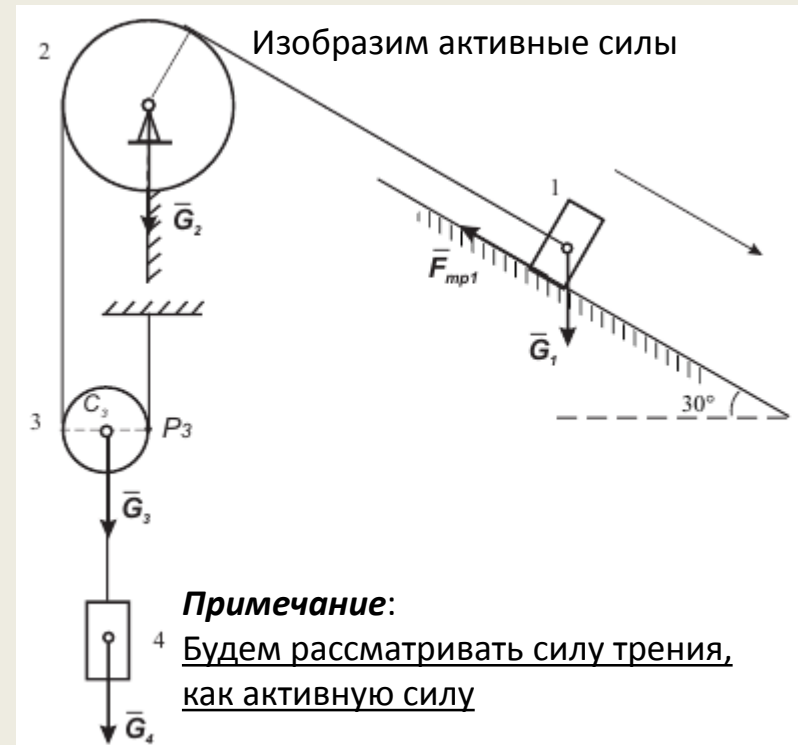
$$m_1=8m; m_2=2m; m_3=m; m_4=2m;$$

$R_2=2r; i_2=r\sqrt{2}$; $r_3=r$; коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость $f=0,1$;

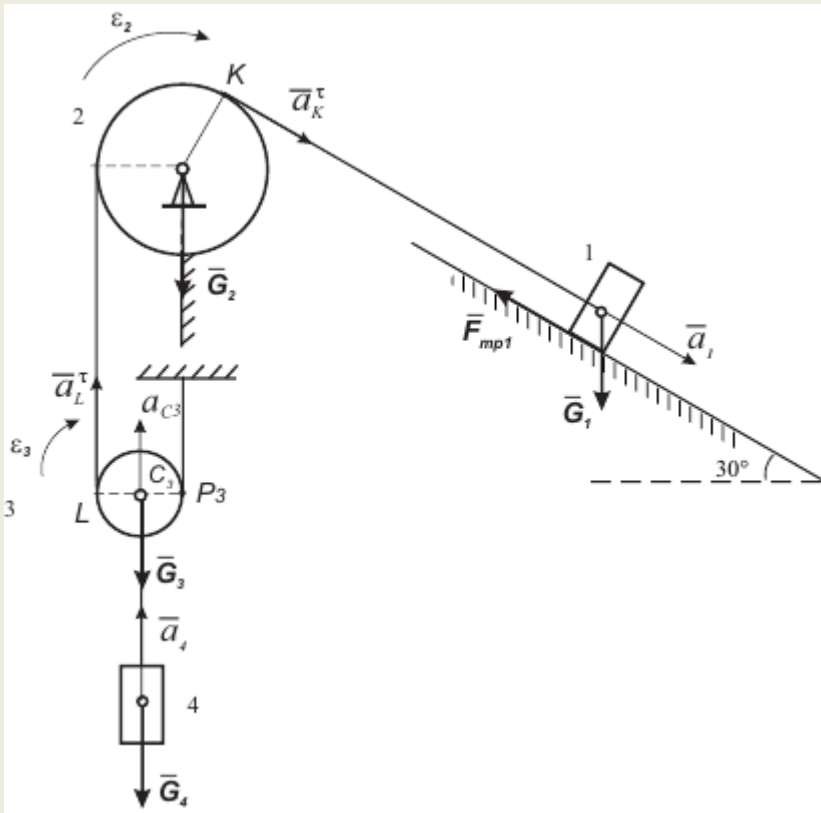
Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$



Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=8m; m_2=2m; m_3=m; m_4=2m;$$

$R_2=2r; i_2=r\sqrt{2}$; $r_3=r$; коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость $f=0,1$;

Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Решение

Выбираем направление ускорения центра масс катка 1 – вниз вдоль наклонной плоскости

Соотношения между ускорениями:

$$a_K^\tau = a_1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_K^\tau}{R_2} = \frac{a_1}{2r}$$

$$a_L^\tau = a_K^\tau = a_1$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_L^\tau}{LP_3} = \frac{a_1}{2r}$$

$$a_{C_3} = \varepsilon_3 C_3 P_3 = \frac{a_1}{2r} \cdot r = 0,5a_1$$

$$a_4 = a_{C_3} = 0,5a_1$$

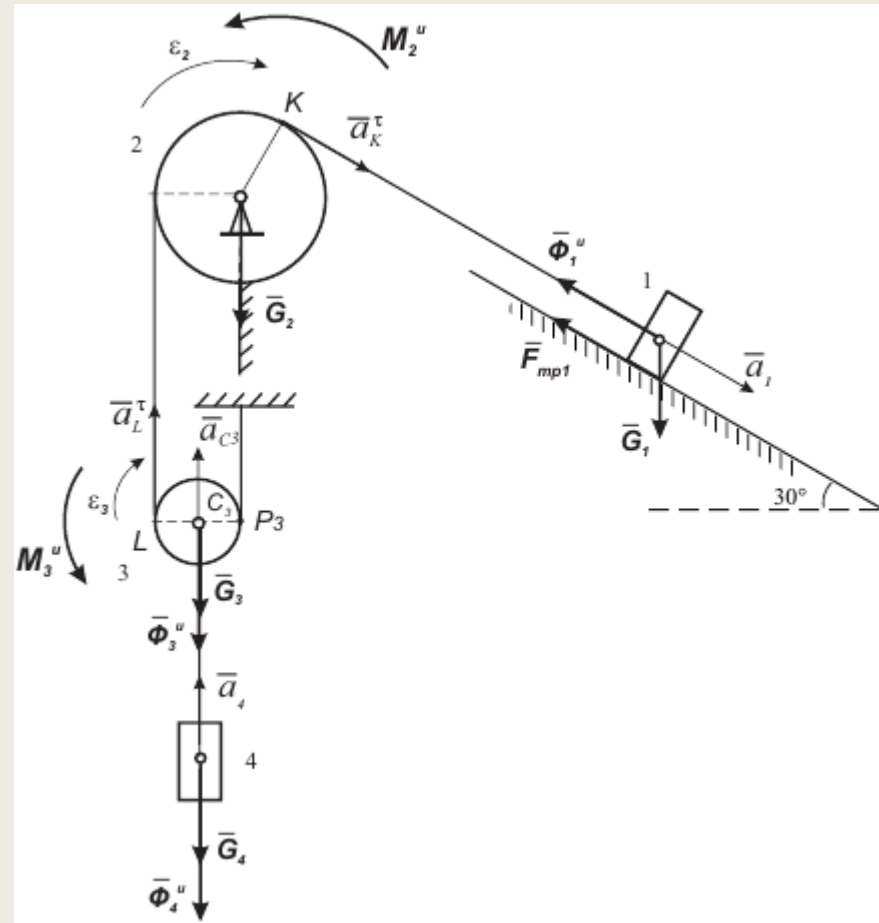
$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{2r}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{2r}$$

$$a_{C_3} = 0,5a_1$$

$$a_4 = 0,5a_1$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=8m; m_2=2m; m_3=m; m_4=2m;$$

$R_2=2r; i_2=r\sqrt{2}$; $r_3=r$; коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость $f=0,1$;

Найти: a_1

Главные векторы и главные моменты сил инерции:

Груз 1 совершает поступательное движение

$$\Phi_1^u = m_1 a_1$$

Барабан 2 совершает вращательное движение

$$M_2^u = J_2 \varepsilon_2$$

Момент инерции барабана

$$J_2 = m_2 i_2^2 = 4mr^2$$

Блок 3 совершает плоскопараллельное движение (C_3 – центр масс, P_3 – мгновенный центр скоростей)

$$\Phi_3^u = m_3 a_{C_3} \quad M_3^u = J_3 \varepsilon_3$$

Момент инерции блока

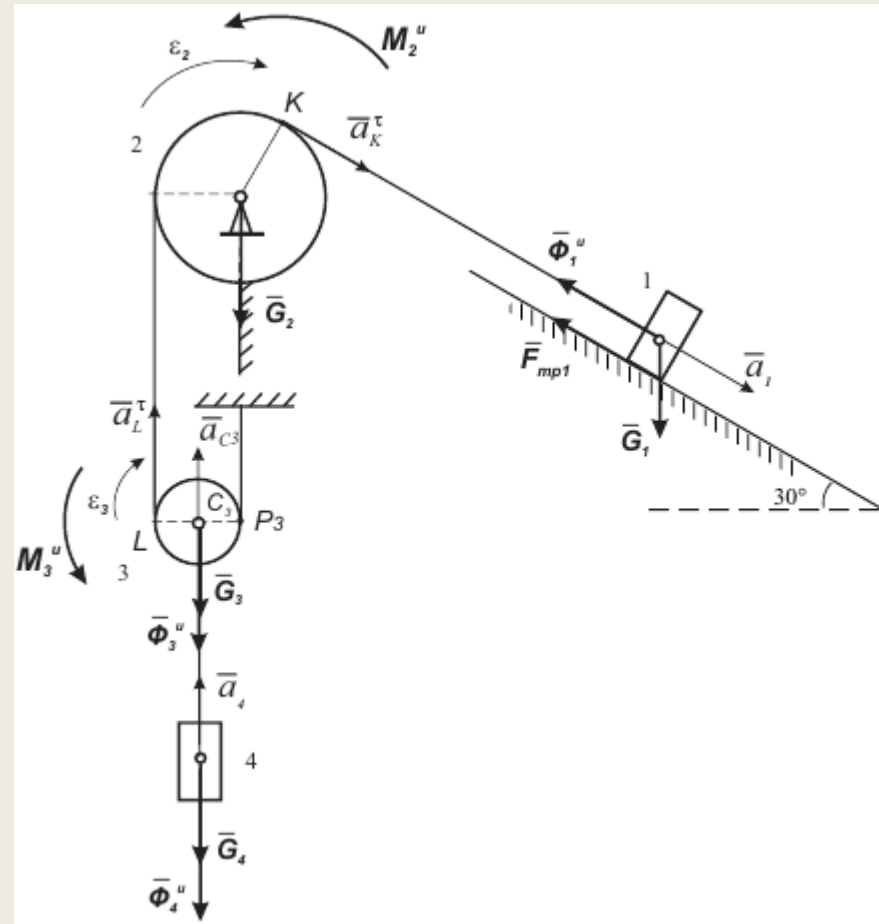
$$J_3 = m_3 r_3^2 = mr^2$$

Груз 4 совершает поступательное движение

$$\Phi_4^u = m_4 a_4$$

Направление главных векторов и главных моментов инерции противоположно ускорениям

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Главные векторы и главные моменты сил инерции с учетом соотношений между массово-инерционными характеристиками:

$$\Phi_1^u = 8ma_1 \quad M_2^u = 4mr^2 \varepsilon_2$$

$$\Phi_3^u = ma_{C_3} \quad M_3^u = mr^2 \varepsilon_3$$

$$\Phi_4^u = 2ma_4$$

Главные векторы и главные моменты сил инерции с учетом соотношений между ускорениями:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{2r}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{2r}$$

$$a_{C_3} = 0,5a_1$$

$$a_4 = 0,5a_1$$



$$\Phi_1^u = 8ma_1$$

$$M_2^u = 4mr^2 \frac{a_1}{2r} = 2mra_1$$

$$\Phi_3^u = 0,5ma_1$$

$$M_3^u = mr^2 \frac{a_1}{2r} = 0,5mra_1$$

$$\Phi_4^u = ma_1$$

Исходные данные:

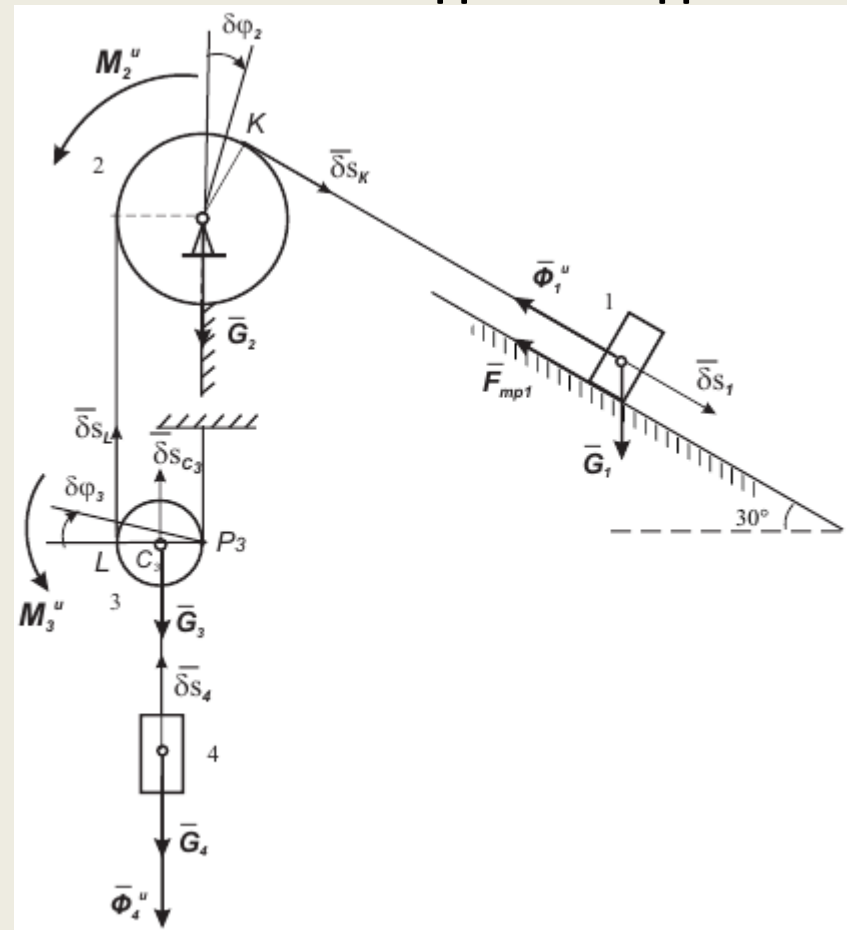
$$m_1=8m; m_2=2m; m_3=m; m_4=2m;$$

$R_2=2r; i_2=r\sqrt{2}$; $r_3=r$; коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость $f=0,1$;

Найти: a_1

Направление главных векторов и главных моментов инерции противоположно ускорениям

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Сообщим системе возможное перемещение.
За независимое перемещение принимаем δs_1

Сумма элементарных работ активных сил на возможном перемещении системы

$$\sum \delta A_k^e = \delta A_{G_1} + \delta A_{F_{mp1}} + \delta A_{G_3} + \delta A_{G_4}$$

$$\delta A_{G_1} = +G_1 \cdot \delta s_1 \cdot \sin 30^\circ = +0,5m_1g \cdot \delta s_1 = +4mg \cdot \delta s_1$$

$$A_{F_{mp1}} = -F_{mp1} \cdot \delta s_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} fm_1g \cdot \delta s_1 = -4\sqrt{3} fmg \cdot \delta s_1$$

$$\delta A_{G_3} = -G_3 \cdot \delta s_{C_3} = -m_3g \cdot \delta s_{C_3} = -mg \cdot \delta s_{C_3}$$

$$\delta A_{G_4} = -G_4 \cdot \delta s_4 = -m_4g \cdot \delta s_4 = -2mg \cdot \delta s_4$$

Сила трения скольжения по закону Кулона равна:

$$F_{mp1} = fN_1 = fG_1 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} fm_1g$$

Сумма элементарных работ активных сил :

$$\sum \delta A_k^e = +4mg \cdot \delta s_1 - 4\sqrt{3} fmg \cdot \delta s_1 - mg \cdot \delta s_{C_3} - 2mg \cdot \delta s_4$$

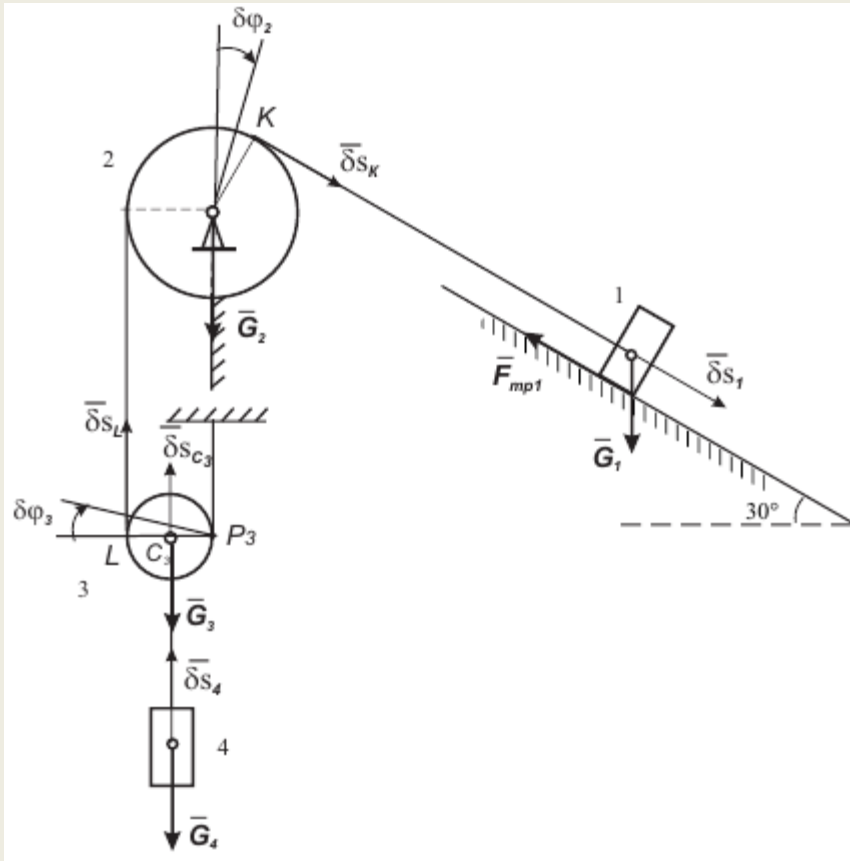
Исходные данные:

$$m_1=8m; m_2=2m; m_3=m; m_4=2m;$$

$R_2=2r; i_2=r\sqrt{2}$; $r_3=r$; коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость $f=0,1$;

Найти: a_1

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=8m; m_2=2m; m_3=m; m_4=2m;$$

$R_2=2r; i_2=r\sqrt{2}$; $r_3=r$; коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость $f=0,1$;

Найти: a_1

Сообщим системе возможное перемещение.
За независимое перемещение принимаем δs_1

Соотношения между перемещениями:

$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= \frac{a_1}{2r} \\ \varepsilon_3 &= \frac{a_1}{2r} \\ a_{C_3} &= 0,5a_1 \\ a_4 &= 0,5a_1\end{aligned}$	\longrightarrow <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\begin{aligned}a_i &\Rightarrow \delta s_i \\ \varepsilon_i &\Rightarrow \delta \varphi_i\end{aligned}$ </div>	$\begin{aligned}\delta \varphi_2 &= \frac{\delta s_1}{2r} \\ \delta \varphi_3 &= \frac{\delta s_1}{2r} \\ \delta s_{C_3} &= 0,5\delta s_1 \\ \delta s_4 &= 0,5\delta s_1\end{aligned}$
--	---	--

Примечание: соотношения между ускорениями и возможными перемещениями подчиняются одним и тем же кинематическим соотношениям

Сумма элементарных работ активных сил :

$$\sum \delta A_k^e = +4mg \cdot \delta s_1 - 4\sqrt{3}fmg \cdot \delta s_1 - mg \cdot \delta s_{C_3} - 2mg \cdot \delta s_4$$

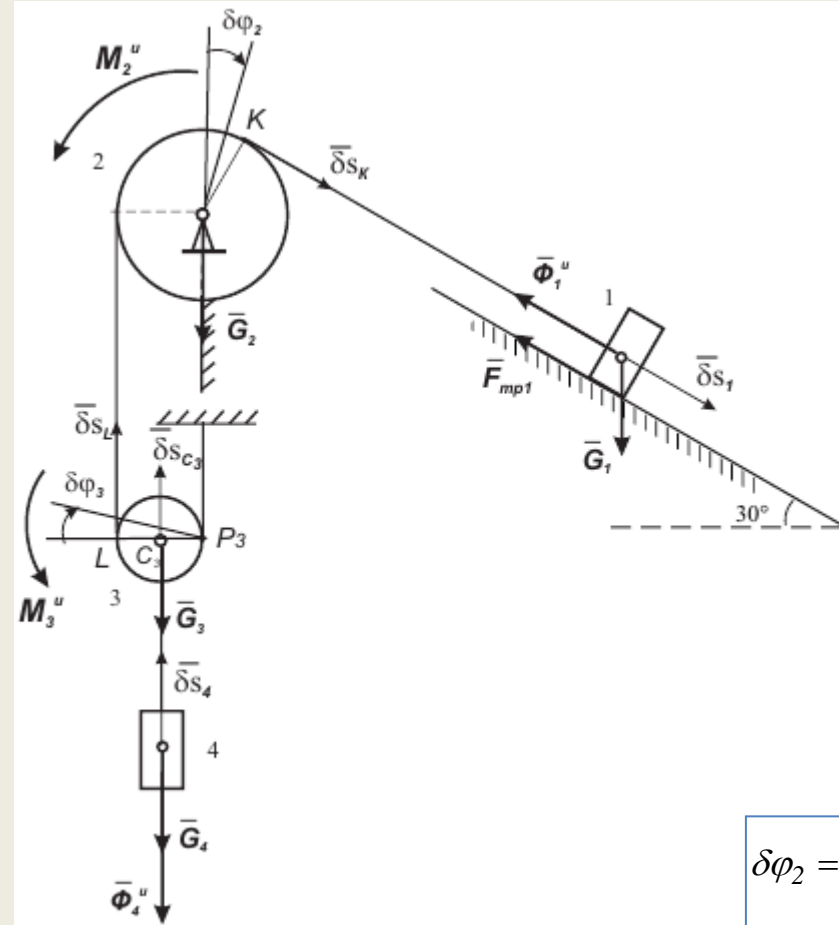
**Сумма элементарных работ активных сил
с учетом соотношений между перемещениями:**

$$\sum \delta A_k^e = +4mg \cdot \delta s_1 - 4\sqrt{3}fmg \cdot \delta s_1 - 0,5mg \cdot \delta s_1 - mg \cdot \delta s_1$$

$$\begin{aligned}\sum \delta A_k^e &= (+4 - 0,4\sqrt{3} - 0,5 - 1)mg \cdot \delta s_1 = \\ &= 1,807mg \cdot \delta s_1\end{aligned}$$

$$\sum \delta A_k^e = 1,807mg \cdot \delta s_1$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=8m; m_2=2m; m_3=m; m_4=2m;$$

$R_2=2r; i_2=r\sqrt{2}$; $r_3=r$; коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость $f=0,1$;

Найти: a_1

$$\begin{aligned}\delta\varphi_2 &= \frac{\delta s_1}{2r} \\ \delta\varphi_3 &= \frac{\delta s_1}{2r} \\ \delta s_{C_3} &= 0,5\delta s_1 \\ \delta s_4 &= 0,5\delta s_1\end{aligned}$$

Сумма элементарных работ сил инерции на возможном перемещении системы

$$\sum \delta A_k^u = \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{\Phi_3^u} + \delta A_{M_3^u} + \delta A_{\Phi_4^u}$$

$$\delta A_{\Phi_1^u} = -\Phi_1^u \cdot \delta s_1 = -8ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$\delta A_{M_2^u} = -M_2^u \cdot \delta\varphi_2 = -2mra_1 \cdot \delta\varphi_2$$

$$\delta A_{\Phi_3^u} = -\Phi_3^u \cdot \delta s_{C_3} = -0,5ma_1 \cdot \delta s_{C_3}$$

$$\delta A_{M_3^u} = -M_3^u \cdot \delta\varphi_3 = -0,5mra_1 \cdot \delta\varphi_3$$

$$\delta A_{\Phi_4^u} = -\Phi_4^u \cdot \delta s_4 = -ma_1 \cdot \delta s_4$$

$$\Phi_1^u = 8ma_1$$

$$M_2^u = 2mra_1$$

$$\Phi_3^u = 0,5ma_1$$

$$M_3^u = 0,5mra_1$$

$$\Phi_4^u = ma_1$$

Сумма элементарных работ сил инерции с учетом соотношений между перемещениями:

$$\sum \delta A_k^u = \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{\Phi_3^u} + \delta A_{M_3^u} + \delta A_{\Phi_4^u} =$$

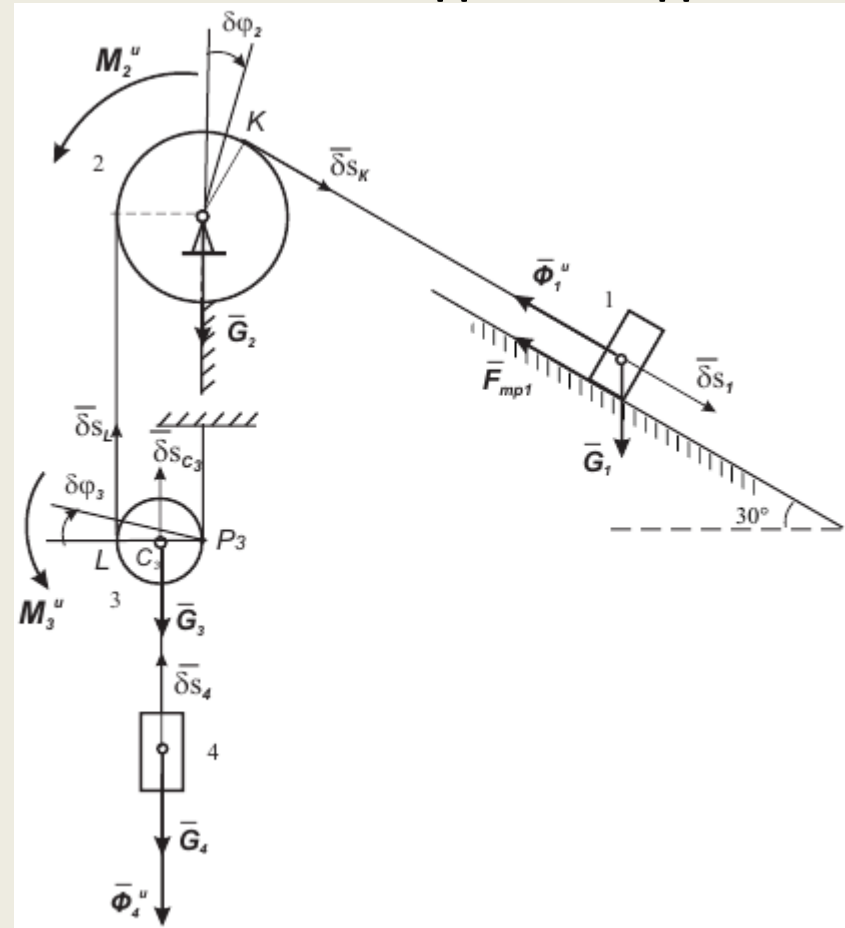
$$-8ma_1 \cdot \delta s_1 - 2mra_1 \cdot \frac{\delta s_1}{2r} - 0,5ma_1 \cdot 0,5\delta s_1 -$$

$$-0,5mra_1 \cdot \frac{\delta s_1}{2r} - ma_1 \cdot 0,5\delta s_1 =$$

$$= (-8 - 1 - 0,25 - 0,25 - 0,5)ma_1 \cdot \delta s_1 = -10ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$\boxed{\sum \delta A_k^u = -10ma_1 \cdot \delta s_1}$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=8m; m_2=2m; m_3=m; m_4=2m;$$

$R_2=2r; i_2=r\sqrt{2}$; $r_3=r$; коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость $f=0,1$;

Найти: a_1

общее уравнение динамики примет вид:

$$\sum \delta A_k^e + \sum \delta A_k^u = 0$$

$$\delta A_{G_1} + \delta A_{F_{mp1}} + \delta A_{G_3} + \delta A_{G_4} + \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{\Phi_3^u} + \delta A_{M_3^u} + \delta A_{\Phi_4^u} = 0$$

$$\sum \delta A_k^e = 1,807mg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^u = -10ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$1,807mg \cdot \delta s_1 - 10ma_1 \cdot \delta s_1 = 0$$

$$[1,807g - 10a_1] \cdot m \cdot \delta s_1 = 0$$

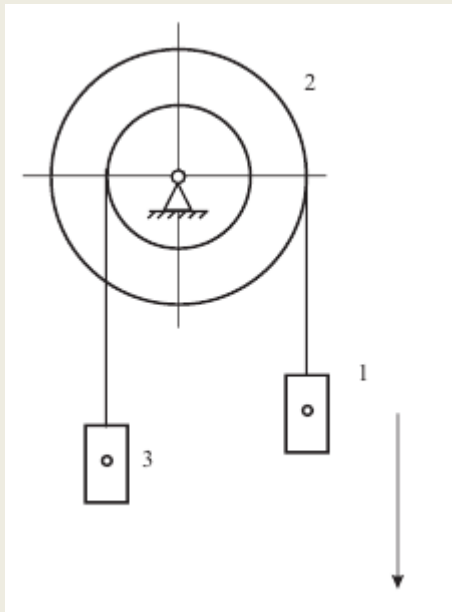
$$[1,807g - 10a_1] = 0$$

$$a_1 = \frac{1,807g}{10} = 0,1807g = 1,773 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $a_1 = 1,773 \text{ м/с}^2$

Примечание: Положительное значение ускорения говорит о том, что его выбранное направление соответствует действительному. Отрицательный знак говорит о том, что ускорения направлены в противоположную сторону. В случае отрицательного результата, необходимо поменять направление ускорений системы и пересчитать элементарные работы заново для нового направления.

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Задача 3

Механическая система состоит из грузов 1, 3 и барабана 2. Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми невесомыми нитями.

Под действием сил тяжести механическая система приходит в движение из состояния покоя.

Определить ускорение груза 1

Изобразим активные силы:

Исходные данные:

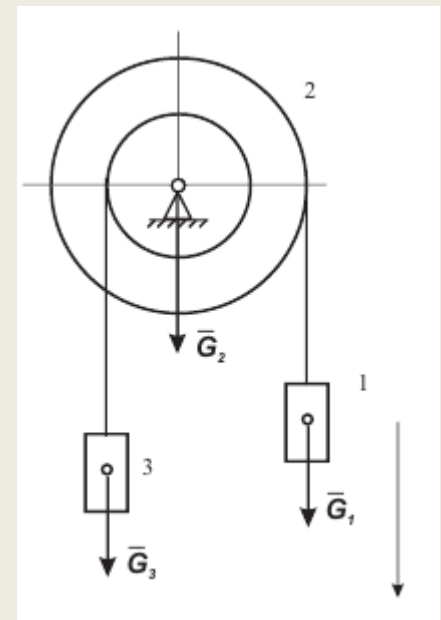
$$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m;$$

$$R_2=2r; r_2=r; i_2=r\sqrt{3}$$

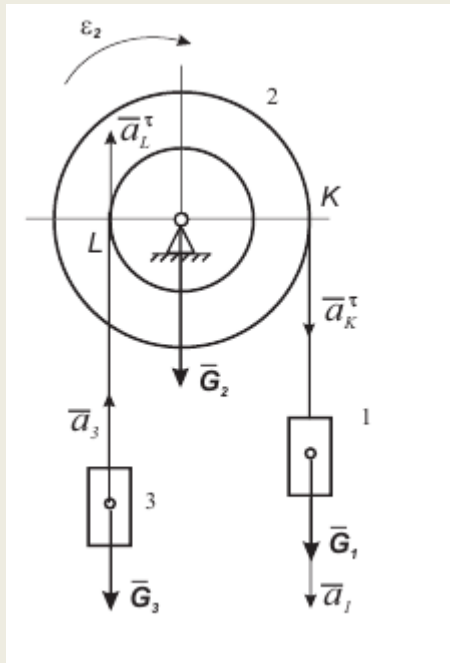
Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$



Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Решение

Выбираем направление ускорения центра масс катка 1 – вниз вдоль наклонной плоскости

Соотношения между ускорениями:

$$a_K^\tau = a_1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_K^\tau}{R_2} = \frac{a_1}{2r}$$

$$a_L^\tau = \varepsilon_2 r_2 = \frac{a_1}{2r} r = 0,5a_1$$

$$a_3 = a_L^\tau = 0,5a_1$$



$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{a_1}{2r} \\ a_3 &= 0,5a_1 \end{aligned}$$

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m;$$

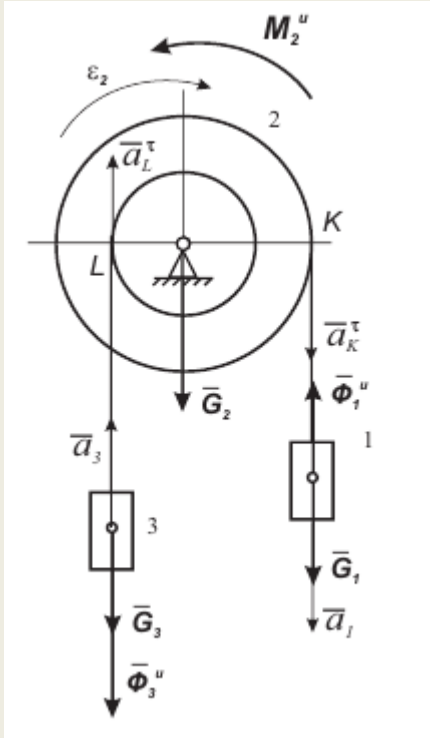
$$R_2=2r; r_2=r; i_2=r\sqrt{3}$$

Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Главные векторы и главные моменты сил инерции:

Груз 1 совершает поступательное движение

$$\Phi_1^u = m_1 a_1$$

Барабан 2 совершает вращательное движение

$$M_2^u = J_2 \varepsilon_2$$

Момент инерции барабана

$$J_2 = m_2 i_2^2 = 6 m r^2$$

Груз 3 совершает поступательное движение

$$\Phi_3^u = m_3 a_3$$

Направление главных векторов и главных моментов инерции противоположно ускорениям

Исходные данные:

$$m_1 = 4m; m_2 = 2m; m_3 = m;$$

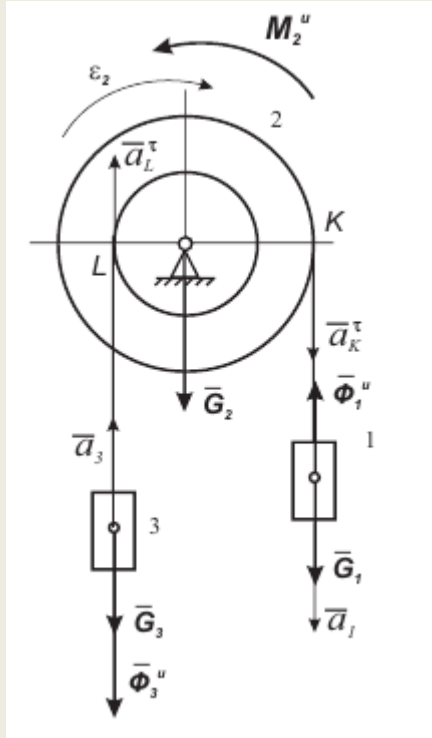
$$R_2 = 2r; r_2 = r; i_2 = r\sqrt{3}$$

Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m;$$

$$R_2=2r; r_2=r; i_2=r\sqrt{3}$$

Найти: a_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

**Главные векторы и главные моменты сил инерции
с учетом соотношений между массово-инерционными
характеристиками:**

$$\Phi_1^u = 4ma_1 \quad M_2^u = 6mr^2 \varepsilon_2$$

$$\Phi_3^u = ma_3$$

**Главные векторы и главные моменты сил инерции
с учетом соотношений между ускорениями:**

$$\Phi_1^u = 4ma_1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{2r}$$

$$a_3 = 0,5a_1$$

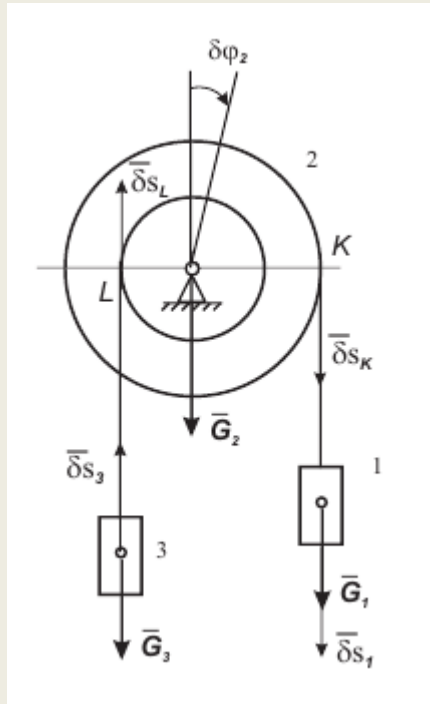


$$M_1^u = 6mr^2 \frac{a_1}{r} = 3mra_1$$

$$\Phi_3^u = 0,5ma_1$$

Направление главных векторов и главных моментов
инерции противоположно ускорениям

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Сообщим системе возможное перемещение.
За независимое перемещение принимаем δs_1

Сумма элементарных работ активных сил на возможном перемещении системы

$$\sum \delta A_k^e = \delta A_{G_1} + \delta A_{G_3}$$

$$\delta A_{G_1} = +G_1 \cdot \delta s_1 = +m_1 g \cdot \delta s_1 = +4mg \cdot \delta s_1$$

$$\delta A_{G_3} = -G_3 \cdot \delta s_3 = -m_3 g \cdot \delta s_3 = -mg \cdot \delta s_3$$

Сумма элементарных работ активных сил :

$$\sum \delta A_k^e = +4mg \cdot \delta s_1 - mg \cdot \delta s_3$$

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m;$$

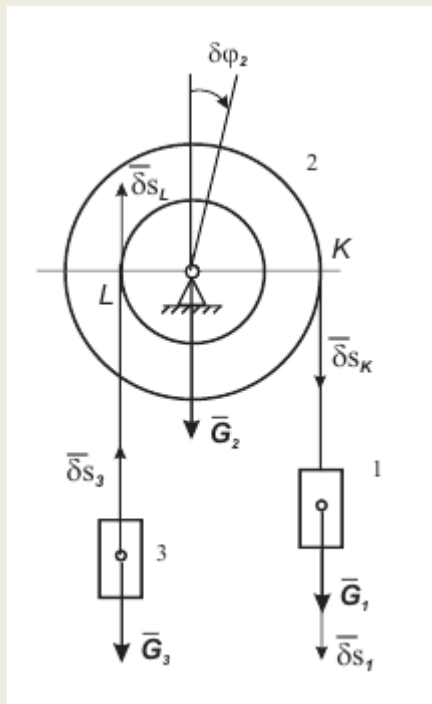
$$R_2=2r; r_2=r; i_2=r\sqrt{3}$$

Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m;$$

$$R_2=2r; r_2=r; i_2=r\sqrt{3}$$

Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Сообщим системе возможное перемещение.
За независимое перемещение принимаем δs_1

Соотношения между перемещениями:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_1}{2r}$$

$$a_3 = 0,5a_1$$



$$a_i \Rightarrow \delta s_i$$

$$\varepsilon_i \Rightarrow \delta \varphi_i$$

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta s_1}{2r}$$

$$\delta s_3 = 0,5\delta s_1$$

Примечание: соотношения между ускорениями и возможными перемещениями подчиняются одним и тем же кинематическим соотношениям

Сумма элементарных работ активных сил :

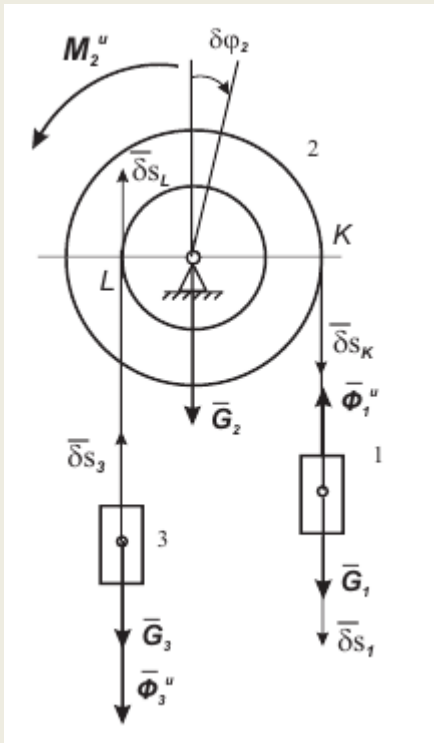
$$\sum \delta A_k^e = +4mg \cdot \delta s_1 - mg \cdot \delta s_3$$

Сумма элементарных работ активных сил с учетом соотношений между перемещениями:

$$\sum \delta A_k^e = +4mg \cdot \delta s_1 - mg \cdot 0,5\delta s_1 = 3,5mg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^a = 3,5mg \cdot \delta s_1$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m;$$

$$R_2=2r; r_2=r; i_2=r\sqrt{3}$$

Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Сумма элементарных работ сил инерции на возможном перемещении системы

$$\sum \delta A_k^u = \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{\Phi_3^u}$$

$$\delta A_{\Phi_1^u} = -\Phi_1^u \cdot \delta s_1 = -4ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$\delta A_{M_2^u} = -M_2^u \cdot \delta \varphi_2 = -3mra_1 \cdot \delta \varphi_2$$

$$\delta A_{M_3^u} = -M_3^u \cdot \delta \varphi_3 = -0,5mra_1 \cdot \delta \varphi_3$$

$$\Phi_1^u = 4ma_1$$

$$M_1^u = 3mra_1$$

$$\Phi_3^u = 0,5ma_1$$

Сумма элементарных работ сил инерции с учетом соотношений между перемещениями:

$$\sum \delta A_k^u = \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{\Phi_3^u} =$$

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta s_1}{2r}$$

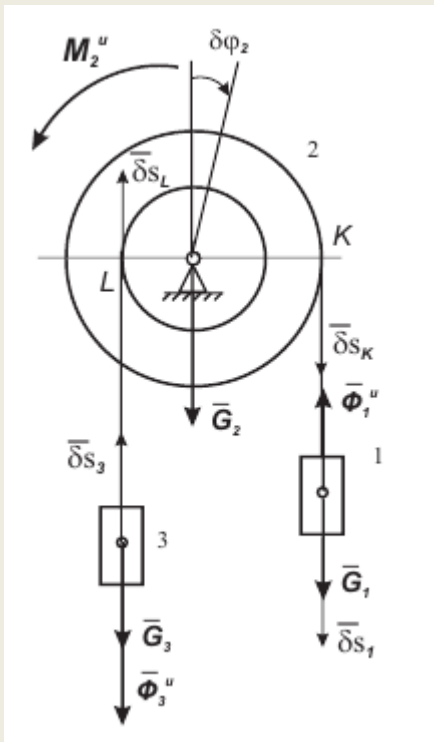
$$\delta s_3 = 0,5\delta s_1$$

$$= -4ma_1 \cdot \delta s_1 - 3mra_1 \cdot \frac{\delta s_1}{2r} - 0,5ma_1 \cdot 0,5\delta s_1 =$$

$$= (-4 - 1,5 - 0,25)ma_1 \cdot \delta s_1 = -5,75ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^u = -5,75ma_1 \cdot \delta s_1$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m;$$

$$R_2=2r; r_2=r; i_2=r\sqrt{3}$$

Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

общее уравнение динамики примет вид:

$$\delta A_{G_1} + \delta A_{G_3} + \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{M_2^u} + \delta A_{\Phi_3^u} = 0$$

$$\sum \delta A_k^a = 3,5mg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^u = -5,75ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$3,5mg \cdot \delta s_1 - 5,75ma_1 \cdot \delta s_1 = 0$$

$$[3,5g - 5,75a_1] \cdot m \cdot \delta s_1 = 0$$

$$[3,5g - 5,75a_1] = 0$$

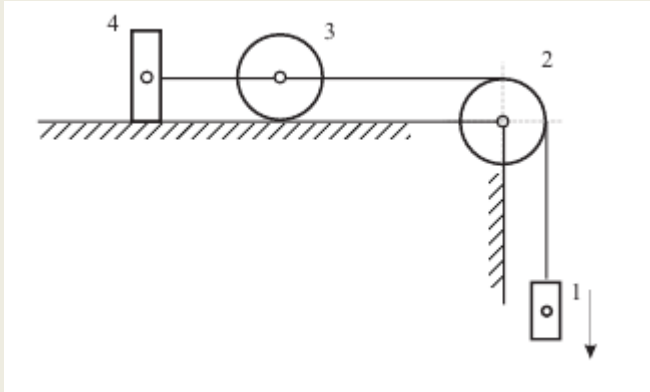
$$a_1 = \frac{3,5g}{5,75} = 0,609g = 5,974 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $a_1 = 5,974 \text{ м/с}^2$

Примечание: Положительное значение ускорения говорит о том, что его выбранное направление соответствует действительному. Отрицательный знак говорит о том, что ускорения направлены в противоположную сторону. В случае отрицательного результата, необходимо поменять направление ускорений системы и пересчитать элементарные работы заново для нового направления.

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями

Задача 4

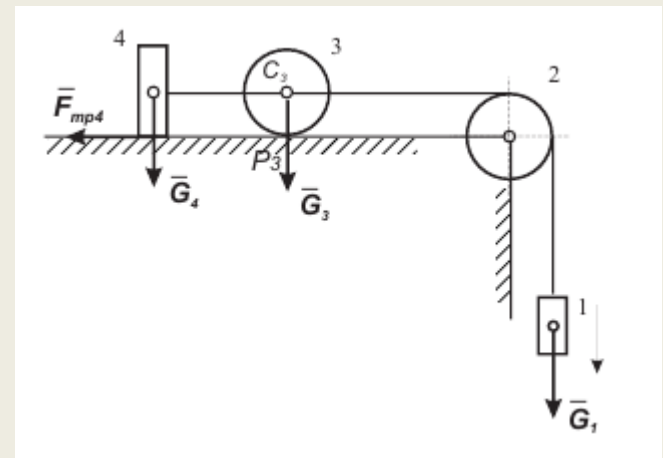


Механическая система состоит из грузов 1 и 4, катка 3 (сплошной однородный цилиндр) и невесомого блока 2. Тела системы соединены друг с другом нерастяжимой невесомой нитью.

Под действием сил тяжести механическая система приходит в движение из состояния покоя. Каток катится по шероховатой плоскости без проскальзывания

Определить ускорение груза 1

Изобразим активные силы



Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m$$

$r_3=r$; коэффициент трения груза 4 о плоскость $f=0,2$

Найти: a_1

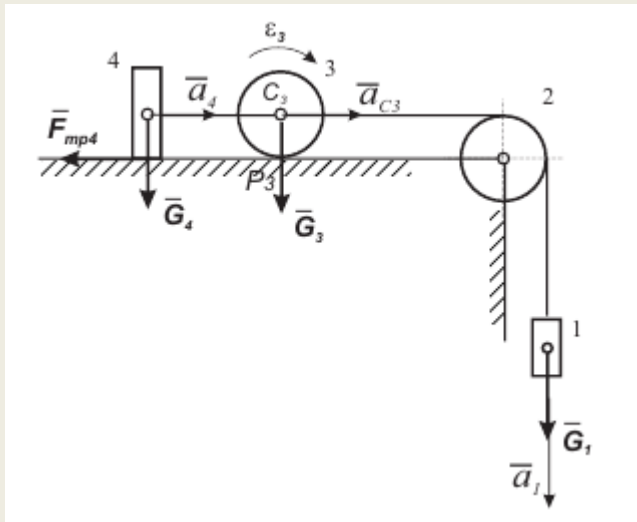
Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Примечание:

Будем рассматривать силу трения, как активную силу

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Решение

Выбираем направление ускорения центра масс катка 1 – вниз вдоль наклонной плоскости

Соотношения между ускорениями:

$$a_{C_3} = a_1$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{C_3}}{C_3 P_3} = \frac{a_1}{r}$$

$$a_4 = a_{C_3} = a_1$$



$$\begin{aligned} a_{C_3} &= a_1 \\ \varepsilon_3 &= \frac{a_1}{r} \\ a_4 &= a_1 \end{aligned}$$

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m$$

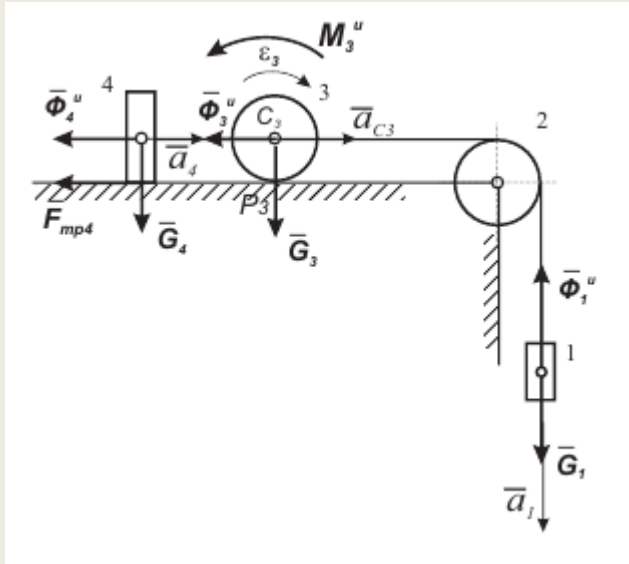
$r_3=r$; коэффициент трения груза 4
о плоскость $f=0,2$

Найти: a_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Главные векторы и главные моменты сил инерции:

Груз 1 совершает поступательное движение

$$\Phi_1^u = m_1 a_1$$

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение
(C_3 – центр масс, P_3 – мгновенный центр скоростей)

$$\Phi_3^u = m_3 a_{C_3} \quad M_3^u = J_3 \varepsilon_3$$

Момент инерции катка

$$J_3 = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 = m r^2$$

Груз 4 совершает поступательное движение

$$\Phi_4^u = m_4 a_4$$

Направление главных векторов и главных моментов инерции противоположно ускорениям

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m$$

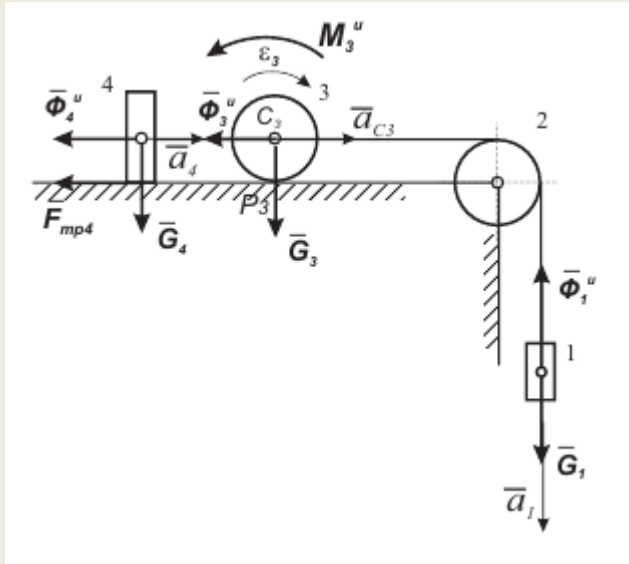
$r_3=r$; коэффициент трения груза 4
о плоскость $f=0,2$

Найти: a_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Главные векторы и главные моменты сил инерции с учетом соотношений между массово-инерционными характеристиками:

$$\Phi_1^u = 4ma_1$$

$$\Phi_3^u = 2ma_{C_3}$$

$$M_3^u = mr^2 \epsilon_3$$

$$\Phi_4^u = ma_4$$

Главные векторы и главные моменты сил инерции с учетом соотношений между ускорениями:

$$\begin{aligned} a_{C_3} &= a_1 \\ \epsilon_3 &= \frac{a_1}{r} \\ a_4 &= a_1 \end{aligned}$$



$$\Phi_1^u = 4ma_1$$

$$\Phi_3^u = 2ma_1$$

$$M_3^u = mr^2 \frac{a_1}{r} = mra_1$$

$$\Phi_4^u = ma_1$$

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m$$

$r_3=r$; коэффициент трения груза 4 о плоскость $f=0,2$

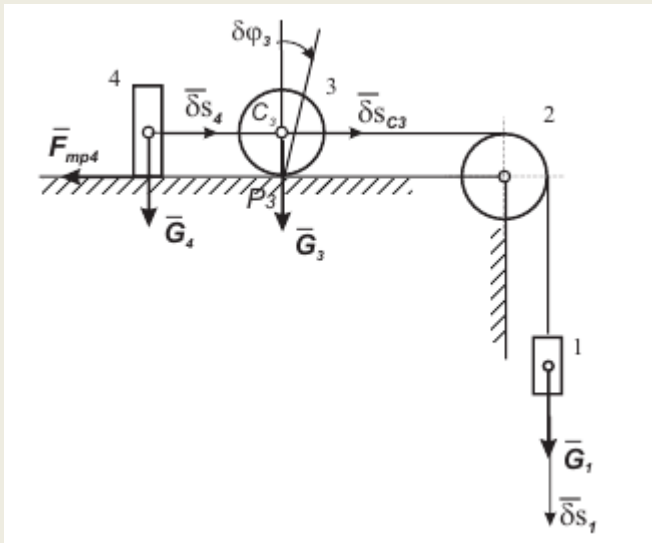
Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Направление главных векторов и главных моментов инерции противоположно ускорениям

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Сообщим системе возможное перемещение.
За независимое перемещение принимаем δs_1

Сумма элементарных работ активных сил на возможном перемещении системы

$$\sum \delta A_k^e = \delta A_{G_1} + \delta A_{F_{mp4}}$$

$$\delta A_{G_1} = +G_1 \cdot \delta s_1 = +m_1 g \cdot \delta s_1 = +4mg \cdot \delta s_1$$

$$A_{F_{mp4}} = -F_{mp4} \cdot \delta s_4 = -f m_4 g \cdot \delta s_4 = -fmg \cdot \delta s_4$$

Сила трения скольжения по закону Кулона равна:

$$F_{mp4} = f N_4 = f G_4 = f m_4 g$$

Сумма элементарных работ активных сил :

$$\sum \delta A_k^e = +4mg \cdot \delta s_1 - fmg \cdot \delta s_4$$

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m$$

$r_3=r$; коэффициент трения груза 4

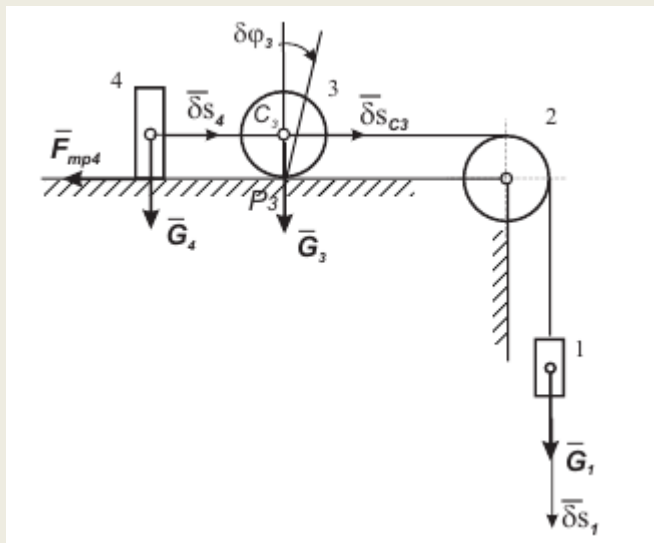
о плоскость $f=0,2$

Найти: a_1

Общее уравнение динамики для системы с идеальными связями:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



Сообщим системе возможное перемещение.
За независимое перемещение принимаем δs_1

Соотношения между перемещениями:

$a_{C_3} = a_1$ $\varepsilon_3 = \frac{a_1}{r}$ $a_4 = a_1$	\Rightarrow	$\delta s_{C_3} = \delta s_1$ $\delta \varphi_3 = \frac{\delta s_1}{r}$ $\delta s_4 = \delta s_1$
---	---------------	---

Примечание: соотношения между ускорениями и возможными перемещениями подчиняются одним и тем же кинематическим соотношениям

Сумма элементарных работ активных сил :

$$\sum \delta A_k^e = +4mg \cdot \delta s_1 - fmg \cdot \delta s_4$$

Сумма элементарных работ активных сил
с учетом соотношений между перемещениями:

$$\sum \delta A_k^e = +4mg \cdot \delta s_1 - fmg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^e = (+4 - 0,2)mg \cdot \delta s_1 = 3,8mg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^e = 3,8mg \cdot \delta s_1$$

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m$$

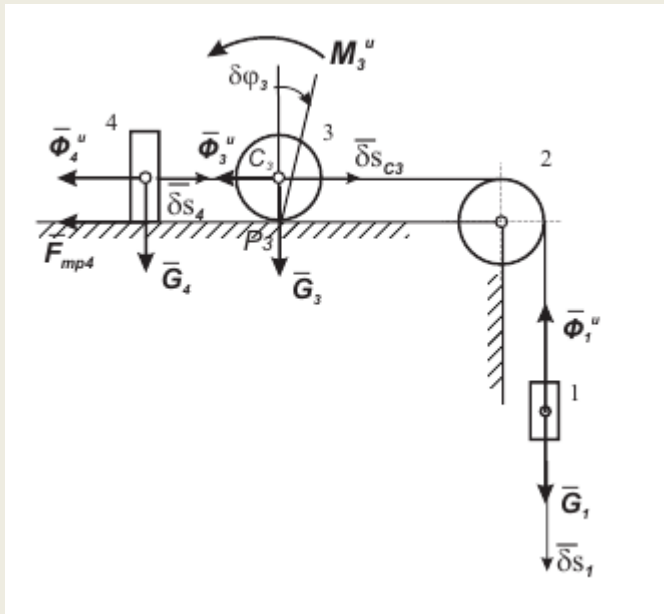
$r_3=r$; коэффициент трения груза 4
о плоскость $f=0,2$

Найти: a_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



**Сумма элементарных работ сил инерции
на возможном перемещении системы**

$$\sum \delta A_k^u = \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{\Phi_3^u} + \delta A_{M_3^u} + \delta A_{\Phi_4^u}$$

$$\delta A_{\Phi_1^u} = -\Phi_1^u \cdot \delta s_1 = -4ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$\delta A_{\Phi_3^u} = -\Phi_3^u \cdot \delta s_3 = -2ma_1 \cdot \delta s_3$$

$$\delta A_{M_3^u} = -M_3^u \cdot \delta \varphi_3 = -mra_1 \cdot \delta \varphi_3$$

$$\delta A_{\Phi_4^u} = -\Phi_4^u \cdot \delta s_4 = -ma_1 \cdot \delta s_4$$

$$\Phi_1^u = 4ma_1$$

$$\Phi_3^u = 2ma_1$$

$$M_3^u = mra_1$$

$$\Phi_4^u = ma_1$$

**Сумма элементарных работ сил инерции
с учетом соотношений между перемещениями:**

$$\sum \delta A_k^u = \delta A_{\Phi_1^u} + \delta A_{\Phi_3^u} + \delta A_{M_3^u} + \delta A_{\Phi_4^u} =$$

$$= -4ma_1 \cdot \delta s_1 - 2mra_1 \cdot \delta s_1 - mra_1 \cdot \frac{\delta s_1}{r} - ma_1 \cdot \delta s_1 =$$

$$= (-4 - 2 - 1 - 1)ma_1 \cdot \delta s_1 = -8ma_1 \cdot \delta s_1$$

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m$$

$r_3=r$; коэффициент трения груза 4
о плоскость $f=0,2$

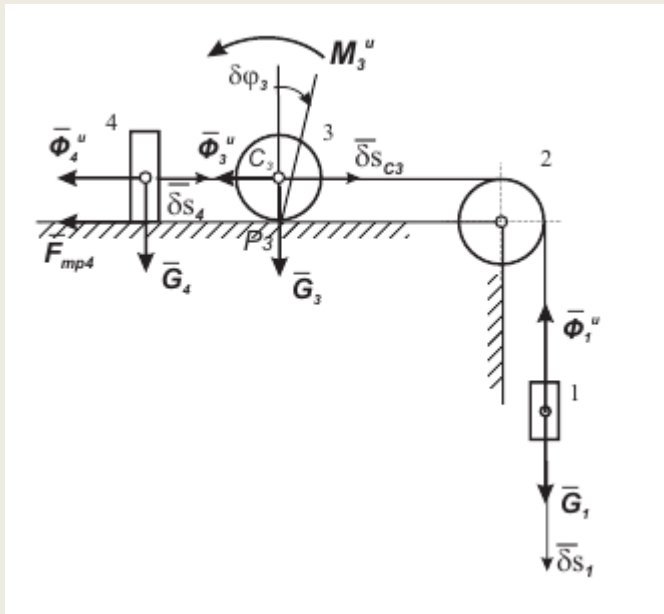
Найти: a_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

$$\sum \delta A_k^u = -8ma_1 \cdot \delta s_1$$

Применение общего уравнения динамики к исследованию движения системы с идеальными связями



общее уравнение динамики примет вид:

$$\sum \delta A_k^e + \sum \delta A_k^u = 0$$

$$\delta A_{G_1} + \delta A_{F_{mp4}} + \delta A_{\phi_1^u} + \delta A_{\phi_3^u} + \delta A_{M_3^u} + \delta A_{\phi_4^u} = 0$$

$$\sum \delta A_k^e = 3,8mg \cdot \delta s_1$$

$$\sum \delta A_k^u = -8ma_1 \cdot \delta s_1$$

$$3,8mg \cdot \delta s_1 - 8ma_1 \cdot \delta s_1 = 0$$

$$[3,8g - 8a_1] \cdot m \cdot \delta s_1 = 0$$

$$[3,8g - 8a_1] = 0$$

$$a_1 = \frac{3,8g}{8} = 0,475g = 4,660 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $a_1 = 4,660 \text{ м/с}^2$

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m$$

$r_3=r$; коэффициент трения груза 4
о плоскость $f=0,2$

Найти: a_1

**Общее уравнение динамики для
системы с идеальными связями:**

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0$$

Примечание: Положительное значение ускорения говорит о том, что его выбранное направление соответствует действительному. Отрицательный знак говорит о том, что ускорения направлены в противоположную сторону. В случае отрицательного результата, необходимо поменять направление ускорений системы и пересчитать элементарные работы заново для нового направления.