

## Вращательное движение твердого тела

На Рисунке 1 изображен барабан, совершающий вращательное движение.

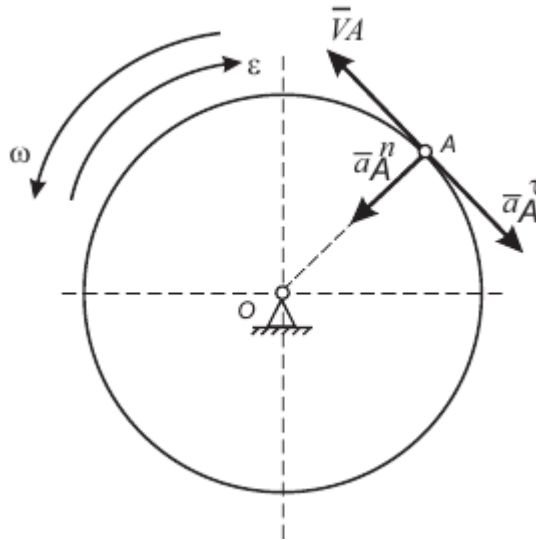


Рисунок 1. Скорости и ускорения при вращательном движении

Численное значение скорости точки вращающегося твердого тела равно произведению угловой скорости тела  $\omega$  на расстояние от этой точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону угловой скорости.

$$V_A = \omega \cdot OA = \omega \cdot l_l$$

$$l_l = OA$$

$$\vec{V}_A \perp OA \text{ по направлению } \omega$$

Вектор ускорения точки вращающегося твердого тела складывается из нормальной и касательной составляющих. Касательная составляющая ускорения направлена по касательной к траектории в сторону углового ускорения  $\varepsilon$ ; нормальная составляющая всегда направлена по радиусу к оси вращения.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$$

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = \omega^2 \cdot l_l \quad \vec{a}_A^n \text{ от } (\cdot)A \text{ к } (\cdot)O$$

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = \varepsilon \cdot l_l \quad \vec{a}_A^\tau \perp OA \text{ по направлению } \varepsilon$$

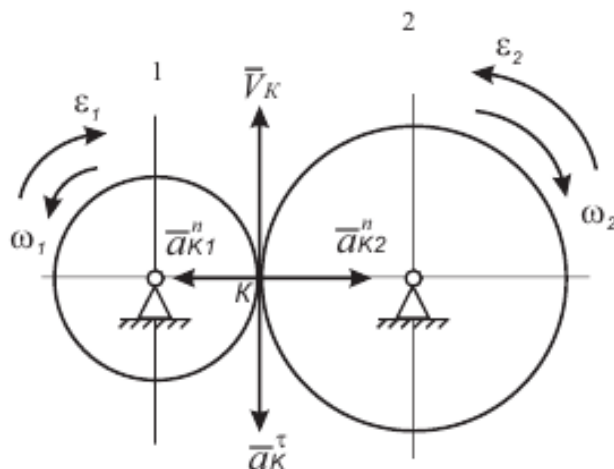


Рисунок 2. Скорости и ускорения в точке касания барабанов (фрикционная передача)

$$\begin{aligned}
 V_K &= \omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2 & a_{K_1}^n &\neq a_{K_2}^n \\
 a_K^\tau &= \varepsilon_1 \cdot R_1 = \varepsilon_2 \cdot R_2 & a_{K_1}^n &= \omega_1^2 \cdot R_1 \\
 & & a_{K_2}^n &= \omega_2^2 \cdot R_2
 \end{aligned}$$

$R_1$  ,  $R_2$  - радиусы барабанов.

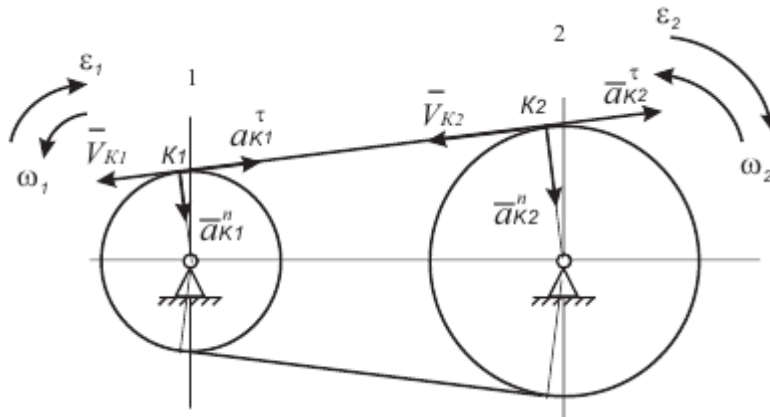


Рисунок 3. Скорости и ускорения в точках касания ремня (ремённая передача)

$$\begin{aligned}
 V_{K_1} &= V_{K_2} & a_{K_1}^\tau &= a_{K_2}^\tau & a_{K_1}^n &\neq a_{K_2}^n \\
 V_{K_1} &= \omega_1 \cdot R_1 & a_{K_1}^\tau &= \varepsilon_1 \cdot R_1 & a_{K_1}^n &= \omega_1^2 \cdot R_1 \\
 V_{K_2} &= \omega_2 \cdot R_2 & a_{K_2}^\tau &= \varepsilon_2 \cdot R_2 & a_{K_2}^n &= \omega_2^2 \cdot R_2
 \end{aligned}$$

$R_1$  ,  $R_2$  - радиусы барабанов.

### Пример решения задачи

Механизм состоит из груза 1, прикрепленного к тросу и движущегося поступательно, и барабанов 2, 3, совершающих вращательное движение. Передача движения между барабанами осуществляется посредством либо ремённой, либо фрикционной передачи. Тросы и ремни, передающие движение считать невесомыми и нерастяжимыми.

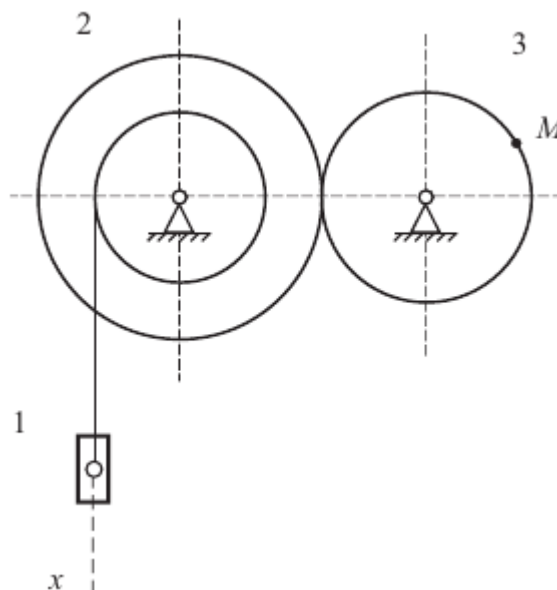


Рисунок 4. Схема механизма

### Закон движения груза 1

$$x = C_0 + C_1 t + C_2 t^2,$$

где  $t$  – время, с;  $C_0, C_1, C_2$  – некоторые постоянные.

В начальный момент времени  $t=0$  положение груза определяется координатой  $x_0$ , начальная скорость груза  $V_0$ . В момент времени  $t_2$  координата груза равна  $x_2$ .

Требуется определить коэффициенты  $C_0, C_1, C_2$  закона движения груза 1. В момент времени  $t_1$  определить скорость и ускорение груза и точки М барабана 3. Векторы линейных скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей и ускорений барабанов показать на схеме механизма.

Это задача на определение скоростей и ускорений при поступательном и вращательном движении твердого тела. При ее решении для определения линейных скоростей и ускорений точек системы и угловых скоростей и ускорений барабанов следует воспользоваться тем, что все точки нерастяжимой нити имеют одинаковые скорость и ускорение. В точках касания барабанов (фрикционная передача) также имеют место одинаковые линейные скорости и касательные составляющие ускорения.

### Исходные данные:

$$R_2 = 100 \text{ см}; \quad r_2 = 60 \text{ см}; \quad R_3 = 75 \text{ см};$$

$$x_0 = 5 \text{ см}; \quad V_0 = 10 \text{ см/с}; \quad x_2 = 179 \text{ см};$$

$$t_1 = 2 \text{ с}; \quad t_2 = 3 \text{ с}$$

Найти: коэффициенты  $C_0, C_1, C_2$  закона движения груза 1;

$$V_1, a_1, V_M, a_M \text{ при } t_1 = 2 \text{ с}$$

### Решение

Груз 1 совершает поступательное движение. Барабаны 2 и 3 – вращательное движение.

$$\text{Закон движения груза 1} \quad x = C_0 + C_1 t + C_2 t^2,$$

$$\text{Скорость груза} \quad V_1 = \dot{x} = C_1 + 2C_2 t$$

$$\text{Ускорение груза} \quad a_1 = \dot{V}_1 = 2C_2 = \text{const}$$

Начальные условия:

$$\text{При } t=0 \quad \begin{cases} x_0 = 5 \text{ см}; \\ V_0 = 10 \text{ см/с} \end{cases}$$

$$\text{Тогда} \quad \begin{cases} C_0 = x_0 = 5 \text{ см}; \\ C_1 = V_0 = 10 \text{ см/с} \end{cases}$$

$$\text{При } t_2 = 3 \text{ с} \quad x_2 = 179 \text{ см};$$

$$179 = 5 + 10 \cdot 3 + C_2 \cdot 9$$

$$C_2 = \frac{179 - 35}{9} = 16 \text{ (см/с}^2\text{)}$$

$$\text{Получим закон движения груза 1} \quad x = 5 + 10t + 16t^2 \text{ (см)},$$

Скорость груза  $V_1 = 10 + 32t \text{ (см/с)}$

Ускорение груза  $a_1 = 32 \text{ (см/с}^2\text{)}$

При  $t_1 = 2 \text{ с}$   $V_1 = 74 \text{ см/с}$ ,  $a_1 = 32 \text{ см/с}^2$

Векторы скорости и ускорения груза направим в положительном направлении оси  $x$  – вниз.

Рассмотрим точку  $L$  – точку касания нити и барабана 2

$$V_L = V_1 = \omega_2 \cdot r_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{74}{60} = 1,233 \text{ с}^{-1}$$

$$a_L^\tau = a_1 = \varepsilon_2 \cdot r_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2} = \frac{32}{60} = 0,533 \text{ с}^{-2}$$

$$a_L^n = \omega_2^2 \cdot r_2 = 1,233^2 \cdot 60 = 91,267 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$$

Рассмотрим точку  $K$  – точку касания барабанов 2 и 3

$$V_K = \omega_2 \cdot R_2 = \omega_3 \cdot R_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot R_2}{R_3} = 1,644 \text{ с}^{-1}$$

$$a_K^\tau = \varepsilon_2 \cdot R_2 = \varepsilon_3 \cdot R_3 \Rightarrow \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2 \cdot R_2}{R_3} = \frac{32}{60} = 0,711 \text{ с}^{-2}$$

$$a_{K_2}^n = \omega_2^2 \cdot R_2 = 1,233^2 \cdot 100 = 152,029 \text{ см/с}^2$$

$$a_{K_3}^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = 1,644^2 \cdot 75 = 202,705 \text{ см/с}^2$$

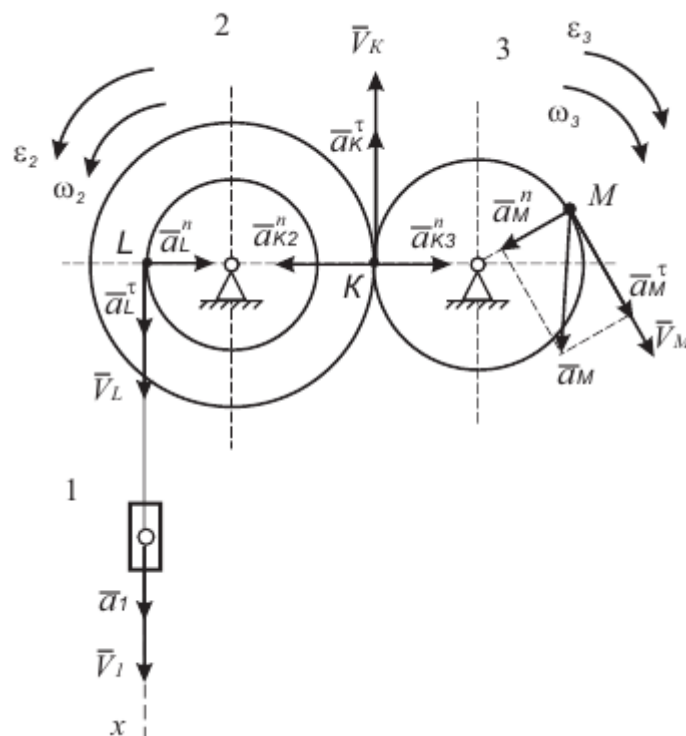


Рисунок 5. Определение скоростей и ускорений

Численные значения скорости и ускорения точки  $M$  совпадают со значениями скорости и ускорения точки  $K$  барабана 3:

$$V_M = V_K = \omega_3 \cdot R_3 = 1,644 \cdot 75 = 123,3 \text{ см/с}$$

$$a_M^\tau = a_K^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 0,711 \cdot 75 = 53,325 \text{ см/с}^2$$

$$a_M^n = a_{K_3}^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = 1,644^2 \cdot 75 = 202,705 \text{ см/с}^2$$

Полное ускорение точки М:

$$a_M = \sqrt{(a_M^\tau)^2 + (a_M^n)^2} = \sqrt{(53,325)^2 + (202,705)^2} = 209,602 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$$

Ответ: закон движения груза 1  $x = 5 + 10t + 16t^2$  (см),

при  $t_1 = 2$  с

$$V_1 = 74 \text{ см/с}, \quad a_1 = 32 \text{ см/с}^2$$

$$V_M = 123,3 \text{ см/с}, \quad a_M = 209,602 \text{ см/с}^2$$

## Плоскопараллельное (плоское) движение твердого тела

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости.

При решении задач на исследование плоскопараллельного движения для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей или теоремой о сложении скоростей. Для определения ускорений точек механизма следует воспользоваться теоремой о сложении ускорений при плоскопараллельном движении твердого тела.

На Рисунке 1 изображен кривошипно-ползунный механизм. Звенья механизма:

- звено 1 (кривошип) совершает вращательное движение;
- звено 2 (шатун) совершает плоскопараллельное движение;
- звено 3 (ползун) совершает возвратно-поступательное движение.

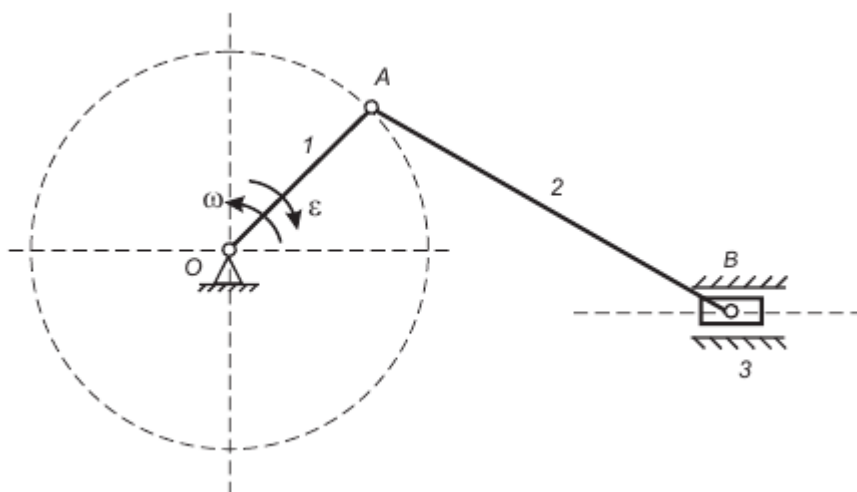


Рисунок 1. Кривошипно-ползунный механизм

Определение скоростей и ускорений при вращательном движении твердого тела (звено 1)

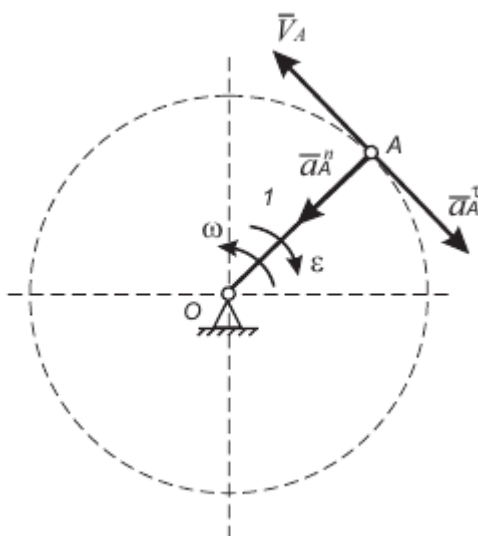


Рисунок 2. Скорости и ускорения при вращательном движении звена

Численное значение скорости точки вращающегося твердого тела (звено 1) равно произведению угловой скорости тела  $\omega$  на расстояние от этой точки до оси вращения. Вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону угловой скорости.

$$V_A = \omega \cdot OA = \omega \cdot l_1$$

$$l_1 = OA$$

$$\vec{V}_A \perp OA \text{ по направлению } \omega$$

Вектор ускорения точки вращающегося твердого тела складывается из нормальной и касательной составляющих. Касательная составляющая ускорения направлена по касательной к траектории в сторону углового ускорения  $\varepsilon$ ; нормальная составляющая всегда направлена по радиусу к оси вращения.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$$

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = \omega^2 \cdot l_1 \quad \vec{a}_A^n \text{ от } (\cdot)A \text{ к } (\cdot)O$$

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = \varepsilon \cdot l_1 \quad \vec{a}_A^\tau \perp OA \text{ по направлению } \varepsilon$$

Определение скоростей и ускорений при плоскопараллельном движении твердого тела (звено 2)

#### Мгновенный центр скоростей

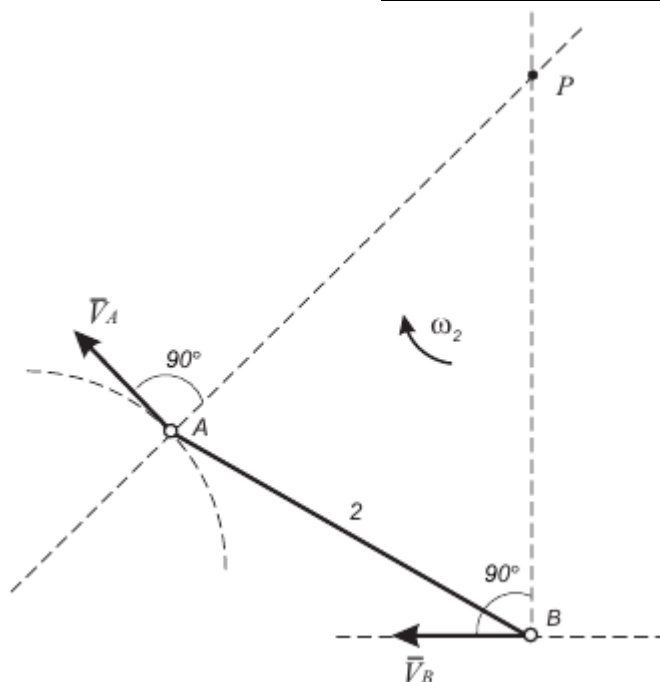


Рисунок 3. Определение положения мгновенного центра скоростей

Мгновенным центром скоростей тела (звена 2) называется точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Для определения положения мгновенного центра скоростей надо знать направления скоростей двух точек  $A$  и  $B$ . Мгновенный центр скоростей  $P$  находится в точке пересечения перпендикуляров, построенных из точек  $A$  и  $B$  к векторам скоростей этих точек:

$$\vec{V}_A \perp AP$$

$$\vec{V}_B \perp BP$$

Скорости точек тела (звена 2) пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей. Угловая скорость звена в данный момент времени равна отношению скорости точки к ее расстоянию до мгновенного центра скоростей:

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \omega_2$$

$$V_A = \omega_2 AP$$

$$V_B = \omega_2 BP$$

### Теорема о сложении скоростей

Скорость любой точки  $B$  тела (звена 2) равна векторной сумме ускорения точки  $A$ , принятой за полюс, и скорости, которую точка  $B$  получает при относительном вращении вокруг этого полюса.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

$$\vec{V}_{BA} = \omega \cdot BA = \omega \cdot l_2$$

$$\vec{V}_{BA} \perp AB \text{ по направлению } \omega$$

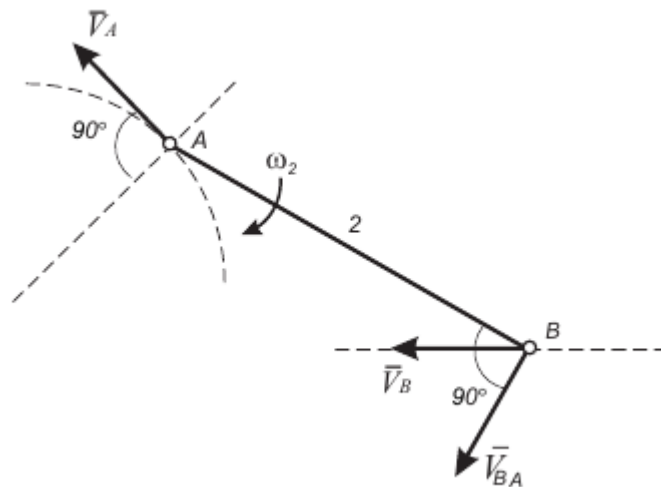


Рисунок 4. Определение скоростей по теореме о сложении скоростей

### Теорема о сложении ускорений при плоском движении твердого тела

Ускорение любой точки  $B$  тела (звена 2) равно векторной сумме ускорения точки  $A$ , принятой за полюс, и ускорения, которое точка  $B$  получает при относительном вращении вокруг этого полюса.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 BA = \omega_2^2 l_2$$

$$\vec{a}_{AB}^n \text{ от } (\cdot)B \text{ к } (\cdot)A$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 BA = \varepsilon_2 l_2$$

$$\vec{a}_{AB}^\tau \perp AB \text{ по направлению } \varepsilon$$

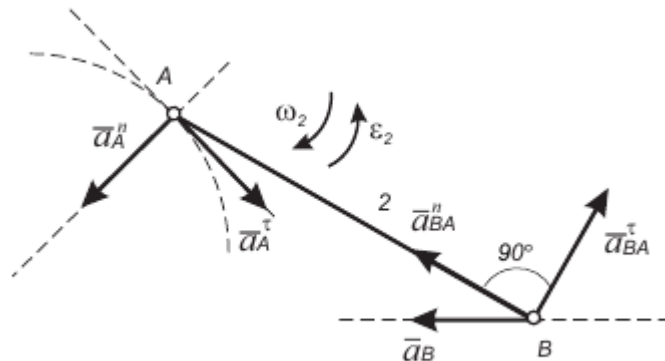


Рисунок 5. Определение ускорений при плоскопараллельном движении

## Примеры решения задачи

### Задача 1

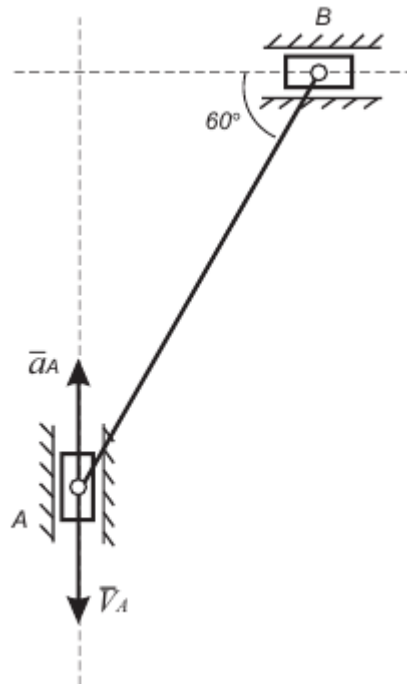
#### Эллипсограф

Определить скорость и ускорение точки  $B$ , а также угловую скорость и ускорение звена  $AB$ .

Исходные данные:

$$AB = 1 \text{ м}, \quad V_A = 2 \text{ м/с}, \quad a_A = 4 \text{ м/с}^2$$

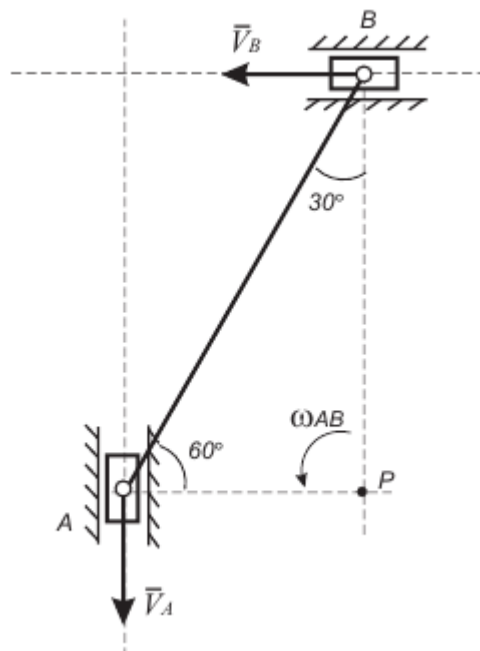
Найти:  $V_B$ ,  $a_B$ ,  $\omega_{AB}$ ,  $\varepsilon_{AB}$



#### Решение

Звенья  $A$  и  $B$  совершают поступательное движение. Звено  $AB$  – плоскопараллельное движение.

Определение скорости точки  $B$  с помощью мгновенного центра скоростей.



$$\vec{V}_A \perp AP$$

$$\vec{V}_B \perp BP$$

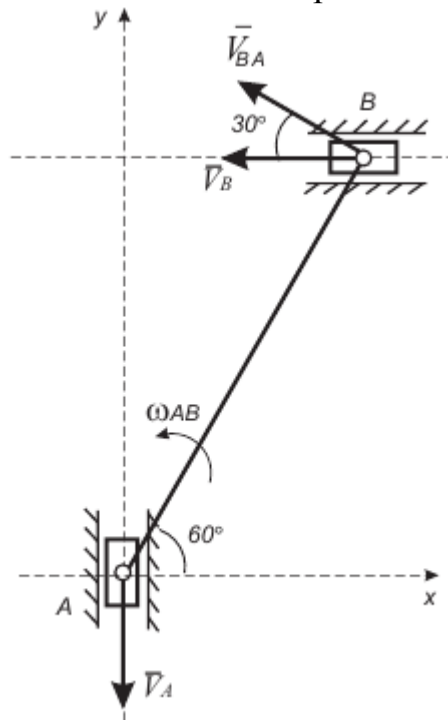
Точка  $P$  – мгновенный центр скоростей звена  $AB$ ,  
 $\triangle APB$ :

$$AB = 1\text{ м}, \quad AP = AB \cdot \sin 30^\circ = 0,5 AB = 0,5\text{ м}, \quad BP = AB \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 0,866\text{ м}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{2,0\text{ м/с}}{0,5\text{ м}} = 4\text{ с}^{-1}$$

$$V_B = \omega_{AB} BP = 4\text{ с}^{-1} \cdot 0,866\text{ м} = 3,464\text{ м/с}$$

Определение скорости точки  $B$  с помощью теоремы о сложении скоростей.



Принимаем за полюс точку  $A$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

$$\vec{V}_{BA} = \omega_{AB} \cdot AB$$

$$\vec{V}_{BA} \perp AB$$

Составляем уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$

$$x: \quad -V_B = 0 - V_{BA} \cos 30^\circ$$

$$y: \quad 0 = -V_A + V_{BA} \sin 30^\circ$$

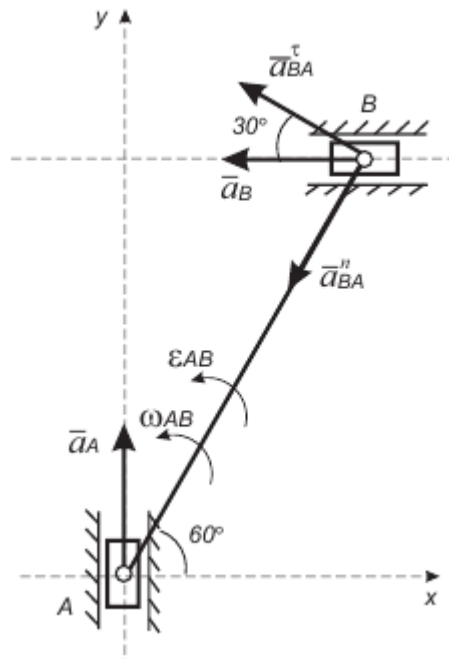
$$V_{BA} = \frac{V_A}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{0,5} = 4\text{ м/с}$$

$$V_B = V_{BA} \cos 30^\circ = 4 \cdot 0,866 = 3,464\text{ м/с}$$

Положительный знак результата свидетельствует, что действительное направление вектора скорости соответствует направлению, выбранному на чертеже.

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} = \frac{4,0 \text{ м/с}}{1 \text{ м}} = 4 \text{ с}^{-1}$$

Определение ускорения точки  $B$  по теореме о сложении ускорений



Принимаем за полюс точку  $A$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 AB = 16 \text{ м/с}^2$$

$\bar{a}_{BA}^n$  от точки  $B$  к точке  $A$ ;

$$a_{BA}^\tau = \epsilon_{AB} AB$$

$$\bar{a}_{BA}^\tau \perp AB$$

Составляем уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$

$$x: -a_B = 0 - a_{BA}^n \sin 30^\circ - a_{BA}^\tau \cos 30^\circ$$

$$y: 0 = a_A - a_{BA}^n \cos 30^\circ + a_{BA}^\tau \sin 30^\circ$$

$$a_{BA}^\tau = \frac{-a_A + a_{BA}^n \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{-4 + 16 \cdot 0,866}{0,5} = 19,712 \text{ м/с}^2$$

$$a_B = a_{BA}^n \sin 30^\circ + a_{BA}^\tau \cos 30^\circ = 16 \cdot 0,5 + 19,712 \cdot 0,866 = 25,071 \text{ м/с}^2$$

Положительный знак результата свидетельствует, что действительное направление вектора ускорения соответствует направлению, выбранному на чертеже.

$$\epsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{19,712}{1} = 19,712 \text{ с}^{-2}$$

Ответ:  $V_B = 3,464 \text{ м/с}$ ,  $\omega_{AB} = 4 \text{ с}^{-1}$ ,  $a_B = 25,071 \text{ м/с}^2$ ,  $\epsilon_{AB} = 19,712 \text{ с}^{-2}$

## Задача 2

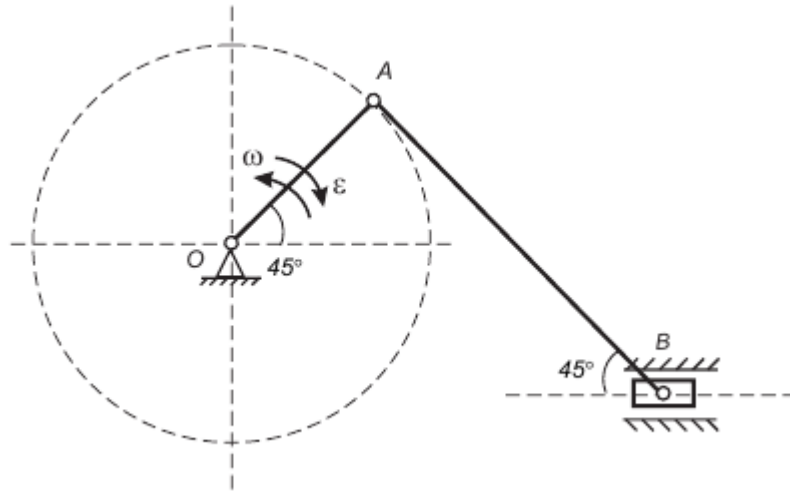
### Кривошипно-ползунный механизм

Определить скорость и ускорение точки  $B$ , а также угловые скорость и ускорение звена  $AB$ .

Исходные данные:

$$OA = 0,5 \text{ м}, \quad AB = 1 \text{ м}, \quad \omega = 2 \text{ с}^{-1}, \quad \varepsilon = 4 \text{ с}^{-2}$$

Найти:  $V_B$ ,  $a_B$ ,  $\omega_{AB}$ ,  $\varepsilon_{AB}$



### Решение

Звено  $OA$  совершает вращательное движение, звено  $B$  совершает поступательное движение, звено  $AB$  – плоскопараллельное движение.

Скорость и ускорение точки  $A$  кривошипа  $OA$ :

$$V_A = \omega \cdot OA = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м/с}$$

$$\vec{V}_A \perp OA \text{ по направлению } \omega$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$$

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ м/с}^2$$

$$a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ м/с}^2$$

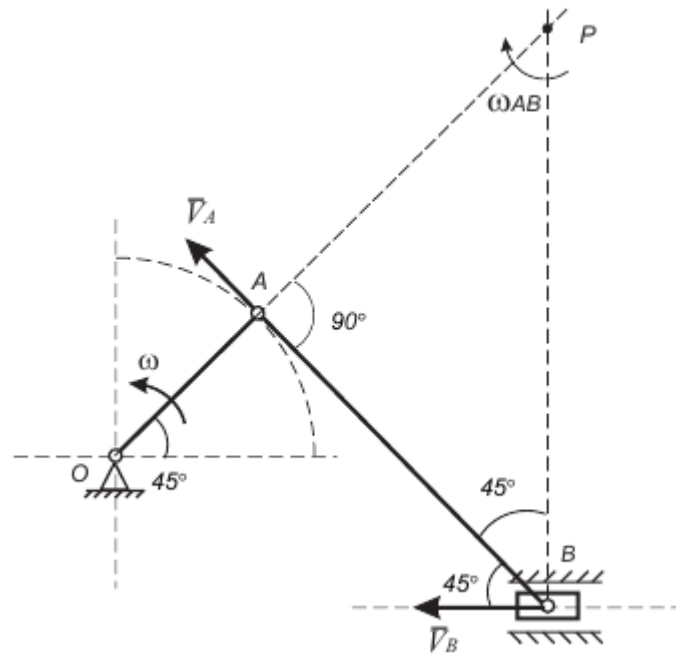
$$\vec{a}_A^n \text{ от точки } A \text{ к точке } O; \vec{a}_A^\tau \perp OA \text{ по направлению } \varepsilon$$

Определение скорости точки  $B$  с помощью мгновенного центра скоростей.

$$\vec{V}_A \perp AP$$

$$\vec{V}_B \perp BP$$

Точка  $P$  – мгновенный центр скоростей звена  $AB$ ,



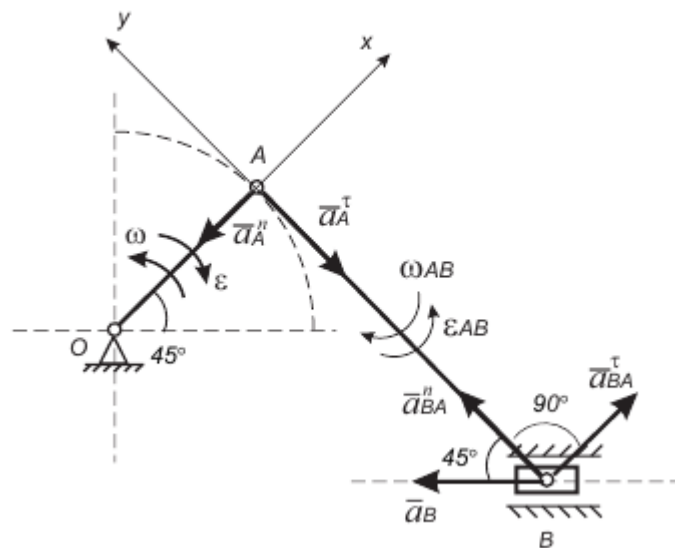
$\triangle APB$ :

$$AB = 1\text{ м}, \quad AP = AB = 1\text{ м}, \quad BP = AB / \cos 45^\circ = \sqrt{2} \cdot AB = 1,41\text{ м}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{1\text{ м/с}}{1\text{ м}} = 1\text{ с}^{-1}$$

$$V_B = \omega_{AB} BP = 1\text{ с}^{-1} \cdot 1,41\text{ м} = 1,41\text{ м/с}$$

Определение ускорения точки  $B$  по теореме о сложении ускорений



Принимаем за полюс точку  $A$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 AB = 1 \text{ м} / \text{с}^2$$

$\bar{a}_{BA}^n$  от точки  $B$  к точке  $A$ ;

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} AB$$

$$\bar{a}_{BA}^\tau \perp AB$$

Составляем уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$

$$x: \quad -a_B \frac{\sqrt{2}}{2} = -a_A^n + 0 + 0 + a_{BA}^\tau$$

$$y: \quad +a_B \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 - a_A^\tau + a_{BA}^n + 0$$

$$a_B = \sqrt{2} \cdot (-a_A^\tau + a_{BA}^n) = 1,41 \cdot (-2 + 1) = -1,41 \text{ м} / \text{с}^2$$

$$a_{BA}^\tau = -a_B \frac{\sqrt{2}}{2} + a_A^n = +1,41 \cdot 0,707 + 2 = 3 \text{ м} / \text{с}^2$$

Положительный знак результата свидетельствует, что действительное направление вектора ускорения соответствует направлению, выбранному на чертеже. Отрицательный знак результата свидетельствует, что действительное направление вектора ускорения противоположно направлению, выбранному на чертеже, следовательно, вектор ускорения точки  $B$  направлен вправо.

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{3}{1} = 3 \text{ с}^{-2}$$

Ответ:  $V_B = 1,41 \text{ м/с}$ ,  $\omega_{AB} = 1 \text{ с}^{-1}$ ,  $a_B = 1,41 \text{ м/с}^2$ ,  $\varepsilon_{AB} = 3 \text{ с}^{-2}$

### Задача 3

#### Плоский шарнирно-рычажный механизм

Определить угловые скорости и ускорения звеньев механизма, а также линейные скорости и ускорения точек механизма.

Исходные данные:

$$l_1 = 0,5 \text{ м}; \quad l_2 = 1,5 \text{ м}; \quad l_3 = 1,2 \text{ м}; \quad l_4 = 0,8 \text{ м}; \quad AD = DB$$

$$\omega_4 = 10 \text{ с}^{-1}$$

Найти:  $V_A$ ,  $V_E$ ,  $\omega_{AB}$ ,  $a_A$ ,  $\varepsilon_{AB}$

Решение

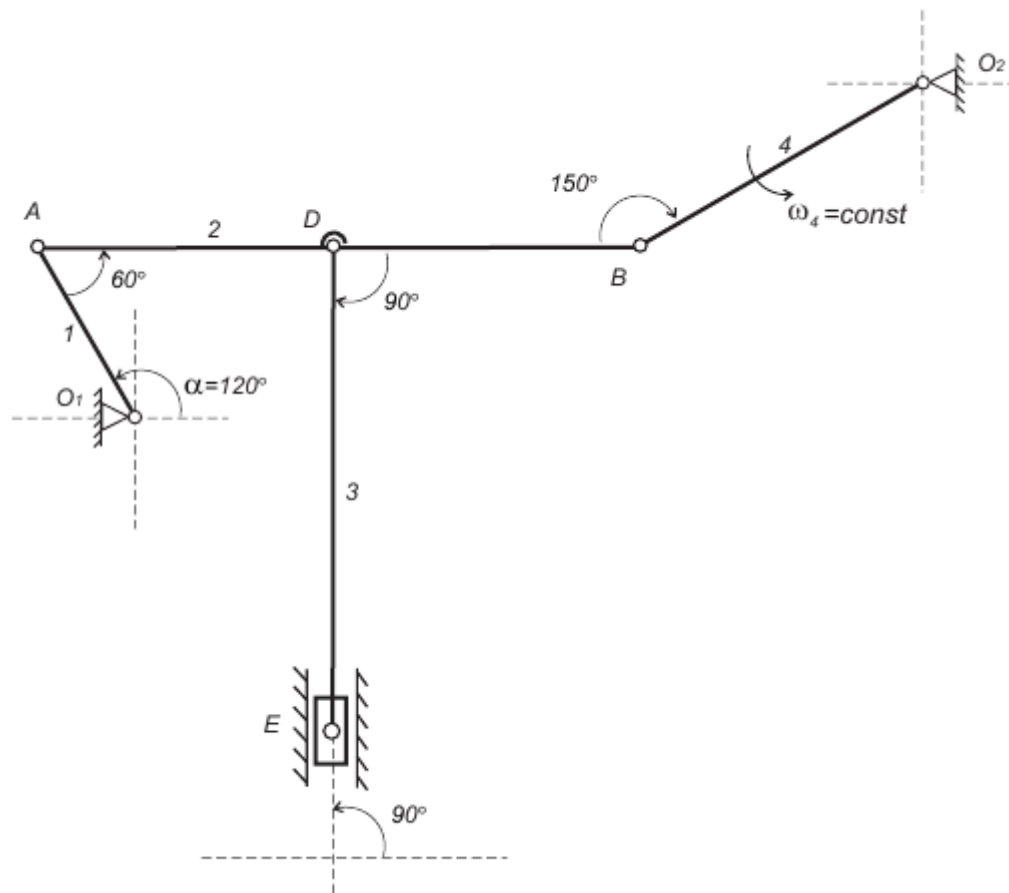


Рисунок 1. Механизм в заданном положении

Звенья 1 и 4 совершают вращательное движение. Звенья 2 и 3 — плоскопараллельное движение.

Определение скоростей.

$$V_B = \omega_4 l_4 = 8,0 \text{ м/с},$$

$$\bar{V}_A \perp AO_1$$

$$\bar{V}_B \perp BO_2$$

$$AC_2 \perp \bar{V}_A$$

$$BC_2 \perp \bar{V}_B$$

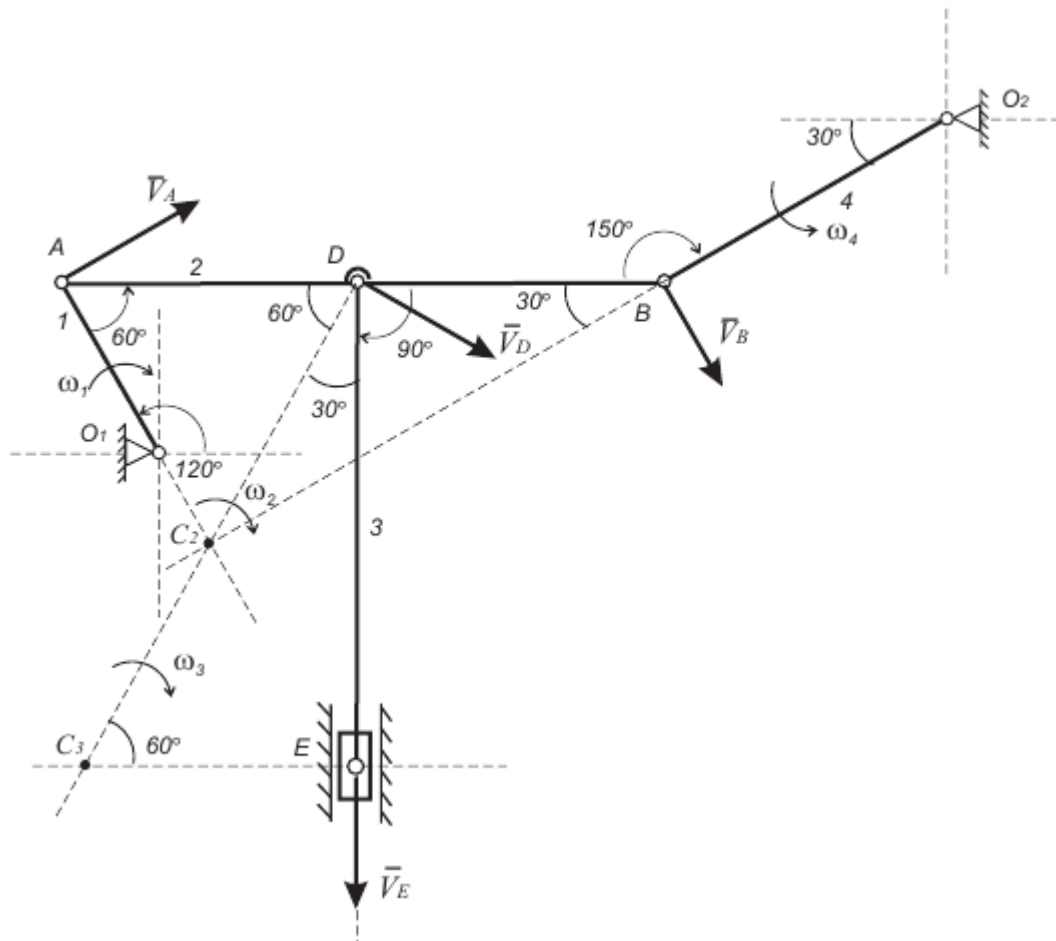


Рисунок 2. Определение скоростей

Точка  $C_2$  – мгновенный центр скоростей звена 2,

$$\Delta AC_2B: AB=l_2, C_2B=l_2\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}l_2, C_2A=l_2\sin 30^\circ = 0,5l_2$$

$$\omega_2 = \frac{V_B}{BC_2} = \frac{8,0}{1,299} = 6,158 \text{ c}^{-1}$$

$$V_A = \omega_2 AC_2 = \omega_2 0,5l_2 = 4,619 \text{ м/с}$$

$$\Delta AC_2D: AD=0,5l_2, C_2A = C_2D = AD = 0,5l_2 = 0,75 \text{ м}$$

$$V_D = \omega_2 DC_2 = \omega_2 0,5l_2 = 4,619 \text{ м/с}$$

$$\omega_1 = \frac{V_A}{AO_1} = \frac{V_A}{l_1} = \frac{4,619}{0,5} = 9,238 \text{ c}^{-1}$$

$$\bar{V}_D \perp DC_3$$

$$\bar{V}_E \perp EC_3$$

Точка  $C_3$  – мгновенный центр скоростей звена 3,

$$\Delta EC_3D:$$

$$DE = l_3$$

$$C_3E = l_3 \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}l_3, C_3D = l_3 / \cos 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}l_3$$

$$\omega_3 = \omega_{DE} = \frac{V_D}{DC_3} = \frac{4,619}{1,386} = 3,333 \text{ c}^{-1}$$

$$V_E = \omega_3 EC_3 = 3,333 \cdot 0,693 = 2,309 \text{ м/с}$$

Определение ускорений.

$$a_B = a_B^n = \omega_4^2 l_4 = 80,0 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$a_B^\tau = \varepsilon_4 l_4 = 0$$

$$\vec{a}_B^n \parallel O_2 B$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$$

$$\vec{a}_A^n = \omega_1^2 l_1 = 42,667 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1$$

$$\vec{a}_A^n \parallel O_1 A; \vec{a}_A^\tau \perp O_1 A$$

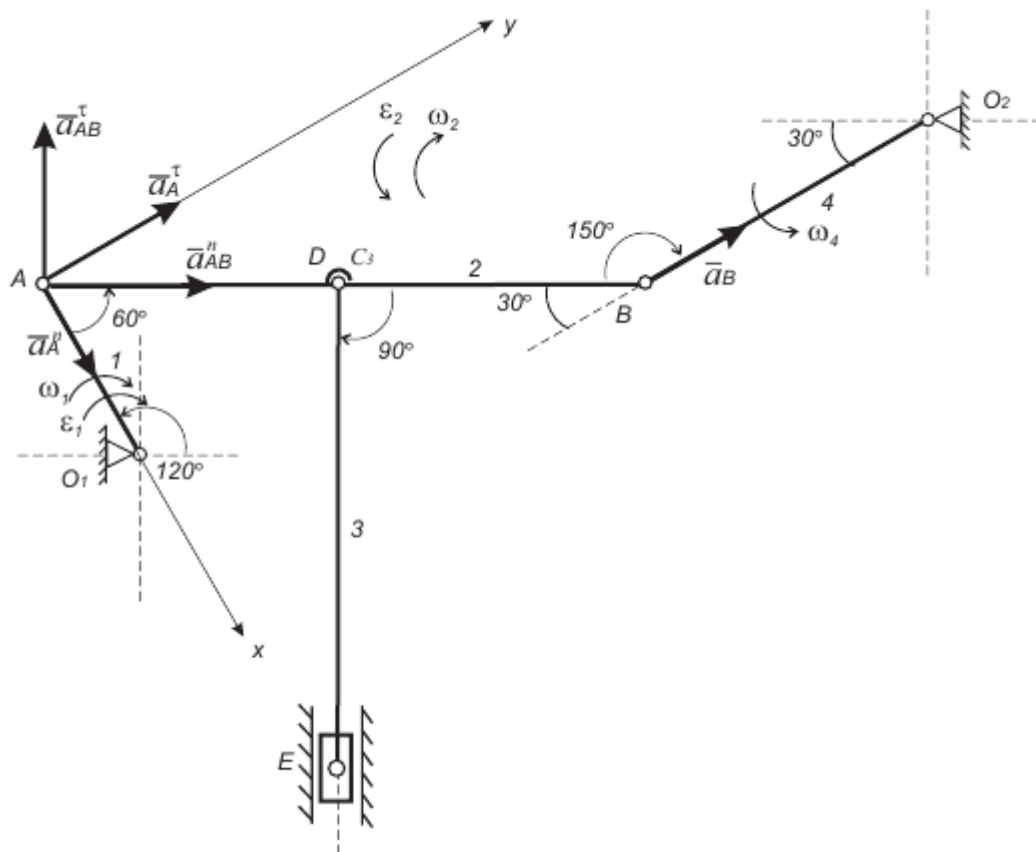


Рисунок 3. Определение ускорений

По теореме о сложении ускорений при плоскопараллельном движении:

$$\vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau = \vec{a}_B + \vec{a}_{AB}^n + \vec{a}_{AB}^\tau$$

$$\vec{a}_{AB}^n \parallel AB; \vec{a}_{AB}^\tau \perp AB$$

$$a_{AB}^n = \omega_2^2 l_2 = 56,889 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 l_2$$

Возьмем проекции векторного уравнения для ускорений на оси  $x$  и  $y$

$$0 + a_A^n = 0 + a_{AB}^n \sin 30^\circ - a_{AB}^\tau \cos 30^\circ$$

$$a_A^\tau + 0 = a_B + a_{AB}^n \cos 30^\circ + a_{AB}^\tau \sin 30^\circ$$

Определяем касательные ускорения:

$$a_{AB}^\tau = \frac{a_A^n - a_{AB}^n \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = -16,422 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

$$a_A^\tau = a_B + a_{AB}^n \cos 30^\circ + a_{AB}^\tau \sin 30^\circ = 121,056 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

Отрицательный знак результата свидетельствует, что действительное направление вектора касательного ускорения противоположно направлению, выбранному на чертеже.

Угловые ускорения

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{AB} = \frac{|a_{AB}^\tau|}{l_2} = \frac{16,422}{1,5} = 10,948 \text{ с}^{-2}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{|a_A^\tau|}{l_1} = \frac{121,056}{0,5} = 242,112 \text{ с}^{-2}$$

Полное ускорение точки B

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{(42,667)^2 + (121,056)^2} = 128,355 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

Ответ:  $V_A=4,619 \text{ м/с}$ ,  $V_E=3,309 \text{ м/с}$ ,  $\omega_{AB}=6,158 \text{ с}^{-1}$ ,  $a_A=128,355 \text{ м/с}^2$ ,  $\varepsilon_{AB}=10,948 \text{ с}^{-2}$

#### Задача 4

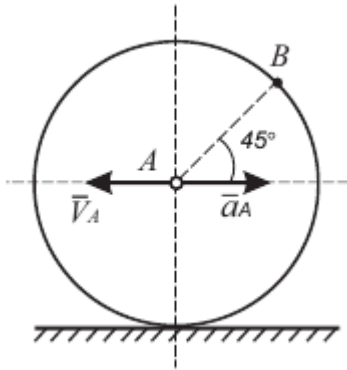
**Колесо, катящееся по неподвижной поверхности без проскальзывания**

Определить скорость и ускорение точки  $B$ , а также угловую скорость и ускорение колеса.

Исходные данные:

$$R = 1 \text{ м}, \quad V_A = 2 \text{ м/с}, \quad a_A = 4 \text{ м/с}^2$$

Найти:  $V_B$ ,  $a_B$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon$



#### Решение

Мгновенный центр скоростей  $P$  находится в точке касания колеса с неподвижной поверхностью, причем  $AP = R = \text{const}$ .

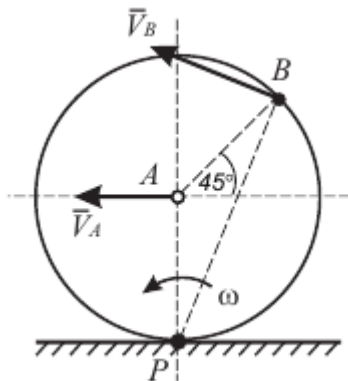
Угловая скорость колеса

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{2 \text{ м/с}}{1 \text{ м}} = 2 \text{ с}^{-1}$$

Так как  $AP = \text{const}$ , можем сразу определить угловое ускорение колеса

$$\varepsilon = \frac{a_A}{R} = \frac{4}{1} = 4 \text{ с}^{-2}$$

Определение скорости точки  $B$  с помощью мгновенного центра скоростей.



$$\vec{V}_A \perp AP$$

$$\vec{V}_B \perp BP$$

$\triangle APB$ :

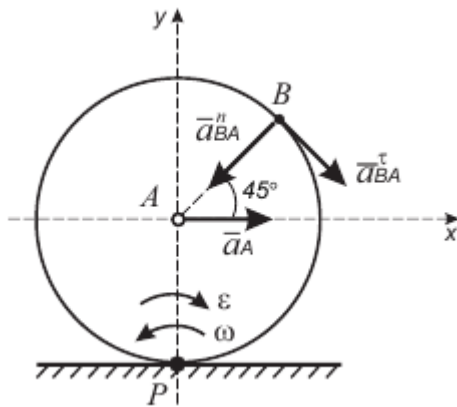
$$AP = AB = R = 1 \text{ м},$$

$$BP = \sqrt{AP^2 + BP^2 - 2 \cdot AP \cdot AB \cdot \cos 135^\circ} = \sqrt{R^2 + R^2 + 2 \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = R\sqrt{2 + \sqrt{2}} = 1,848 \text{ м}$$

$$\cos 135^\circ = -\sin 45^\circ$$

$$V_B = \omega_{AB} BP = 2 \text{ с}^{-1} \cdot 1,848 \text{ м} = 3,696 \text{ м/с}$$

Определение ускорения точки  $B$  по теореме о сложении ускорений



Принимаем за полюс точку  $A$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$$

$$a_{BA}^n = \omega^2 AB = \omega^2 R = 4 \text{ м/с}^2$$

$\bar{a}_{BA}^n$  от точки  $B$  к точке  $A$ ;

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB = \varepsilon \cdot R = 4 \text{ м/с}^2$$

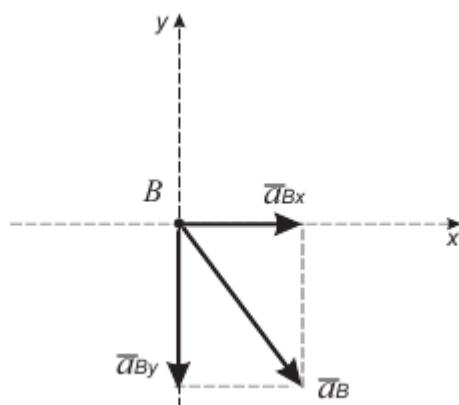
$\bar{a}_{BA}^\tau \perp AB$  по направлению  $\varepsilon$

Составляем уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$

$$x: \quad a_{Bx} = a_A - a_{BA}^n \frac{\sqrt{2}}{2} + a_{BA}^\tau \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4 \text{ м/с}^2$$

$$y: \quad a_{By} = 0 - a_{BA}^n \frac{\sqrt{2}}{2} - a_{BA}^\tau \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -5,657 \text{ м/с}^2$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{4^2 + 5,657^2} = 6,928 \text{ м/с}^2$$



Ответ:  $V_B = 3,696 \text{ м/с}$ ,  $\omega = 2 \text{ с}^{-1}$ ,  $\varepsilon = 4 \text{ с}^{-2}$ ,  $a_B = 6,928 \text{ м/с}^2$ ,

## Задача 5

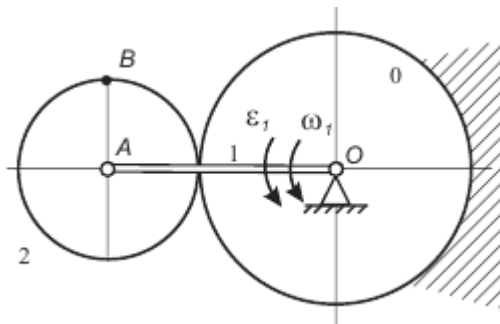
### Планетарный механизм

Звенья механизма:

звено 1 (кривошип  $OA$ ) совершает вращательное движение;

звено 2 (спутниковое колесо) совершает плоскопараллельное движение;

звено 0 (солнцевое колесо) – стойка, неподвижное звено.



Определить скорость и ускорение точки  $B$ , а также угловые скорость и ускорение подвижного колеса 2.

Исходные данные:

$$OA = 1 \text{ м}, r_2 = r = 0,4 \text{ м}, \omega_1 = 2 \text{ с}^{-1}, \varepsilon_1 = 4 \text{ с}^{-2}$$

Найти:  $V_B$ ,  $a_B$ ,  $\omega_2$ ,  $\varepsilon_2$

### Решение

Скорость и ускорение точки  $A$  кривошипа  $OA$ :

$$V_A = \omega_1 \cdot OA = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м/с}$$

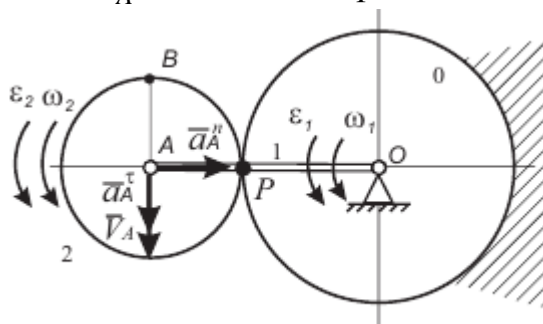
$$\vec{V}_A \perp OA \text{ по направлению } \omega_1$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau$$

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot OA = 4 \cdot 1 = 4 \text{ м/с}^2$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot OA = 4 \cdot 1 = 4 \text{ м/с}^2$$

$$\vec{a}_A^n \text{ от точки } A \text{ к точке } O; \vec{a}_A^\tau \perp OA \text{ по направлению } \varepsilon_1$$



Мгновенный центр скоростей  $P$  находится в точке касания подвижного колеса 2 с неподвижной поверхностью колеса 1, причем  $AP = r = \text{const.}$

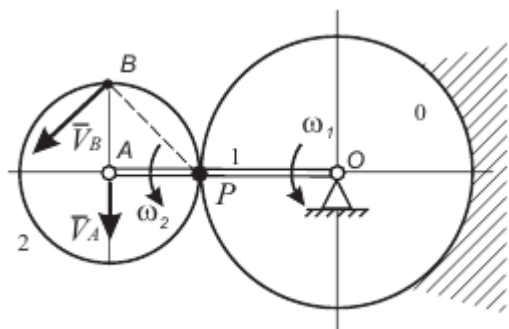
Угловая скорость колеса 2

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{r} = \frac{2 \text{ м/с}}{0,4 \text{ м}} = 5 \text{ с}^{-1}$$

Так как  $AP = const$ , можем сразу определить угловое ускорение колеса 2

$$\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{AP} = \frac{a_A^\tau}{r} = \frac{4}{0,4} = 10 \text{ с}^{-2}$$

Определение скорости точки  $B$  с помощью мгновенного центра скоростей.



$$\vec{V}_A \perp AP$$

$$\vec{V}_B \perp BP$$

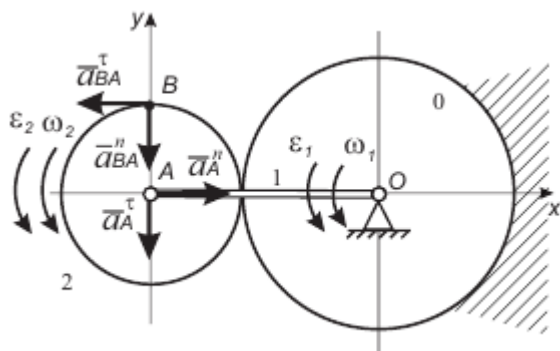
$\triangle APB$ :

$$AP = AB = r = 0,4 \text{ м},$$

$$BP = \sqrt{AP^2 + AB^2} = r\sqrt{2} = 0,564 \text{ м}$$

$$V_B = \omega_2 BP = 5 \text{ с}^{-1} \cdot 0,564 \text{ м} = 2,82 \text{ м/с}$$

Определение ускорения точки  $B$  по теореме о сложении ускорений



Принимаем за полюс точку  $A$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 AB = \omega_2^2 \cdot r = 25 \cdot 0,4 = 10 \text{ м/с}^2$$

$\vec{a}_{BA}^n$  от точки  $B$  к точке  $A$ ;

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 AB = \varepsilon_2 r = 10 \cdot 0,4 = 4 \text{ м/с}^2$$

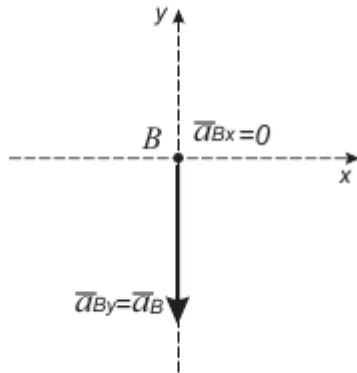
$\vec{a}_{BA}^\tau \perp AB$  по направлению  $\varepsilon_2$

Составляем уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$

$$x: \quad a_{Bx} = a_A^n + 0 + 0 - a_{BA}^\tau = 4 - 4 = 0 \text{ м/с}^2$$

$$y: \quad a_{By} = 0 - a_A^\tau - a_{BA}^n + 0 = -4 - 10 = -14 \text{ м/с}^2$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{0^2 + 14^2} = 14 \text{ м/с}^2$$



Ответ:  $\omega_2 = 5 \text{ с}^{-1}$ ,  $\varepsilon_2 = 10 \text{ с}^{-2}$ ,  $V_B = 2.82 \text{ м/с}$ ,  $a_B = 14 \text{ м/с}^2$ ,

## Расчет дифференциальных механизмов

На Рисунке 1 изображен дифференциальный механизм. Механизм имеет две степени свободы, т.е. два ведущих звена, это звенья 1 и 2.

звено 1 – водило (кривошип), совершает вращательное движение;

звено 2 – центральное колесо (зубчатое колесо с неподвижной осью), совершает вращательное движение;

звено 3 – сателлит (зубчатое колесо с подвижной осью), совершает плоскопараллельное движение.

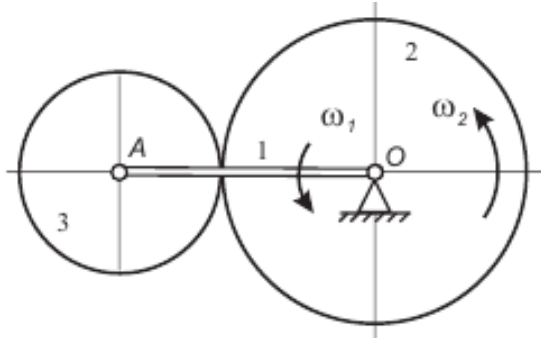
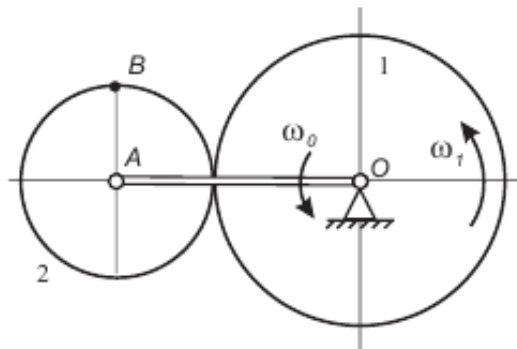


Рисунок 1. Дифференциальный механизм

### Примеры решения задачи

#### Задача 1

Определить скорость и ускорение точки  $B$ , а также угловую скорость колеса 2 (сателлита).



Исходные данные:

$$OA = 1 \text{ м}, r_2 = r = 0,4 \text{ м}, \omega_0 = 2 \text{ с}^{-1}, \omega_1 = 5 \text{ с}^{-1}$$

Найти:  $V_B$ ,  $a_B$ ,  $\omega_2$

#### Решение

Скорость и ускорение точки  $A$  кривошипа  $OA$ :

$$V_A = \omega_0 \cdot OA = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м/с}$$

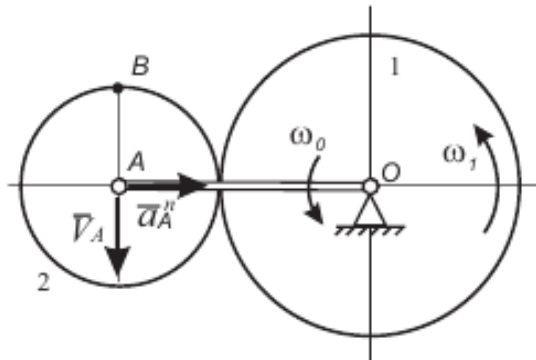
$$\vec{V}_A \perp OA \text{ по направлению } \omega_0$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n$$

$$a_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = 4 \cdot 1 = 4 \text{ м/с}^2$$

$\bar{a}_A^n$  от точки A к точке O;

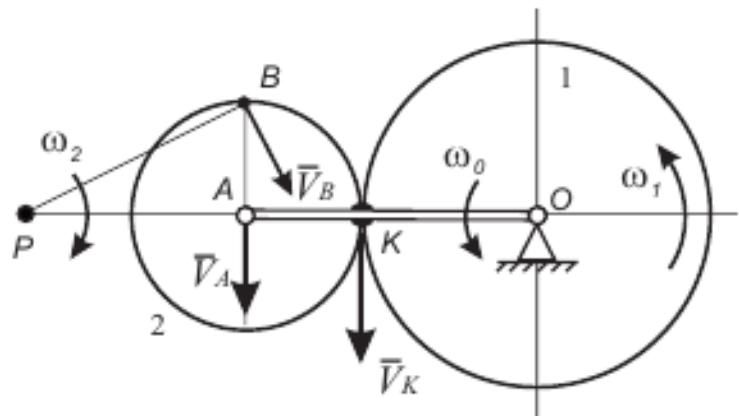
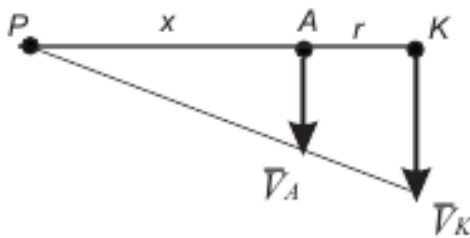
$$a_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot OA = 0$$



Скорость точки K – точки касания колес 1 и 2.

$$V_K = \omega_1 \cdot R_1 = 5 \cdot 0,6 = 3 \text{ м/с}$$

$$R_1 = OA - r = 1 - 0,4 = 0,6 \text{ м}$$



Определим положение мгновенного центра скоростей P подвижного колеса 2.

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_K}{KP} \Rightarrow \frac{V_A}{x} = \frac{V_K}{x+r}$$

$$x = \frac{V_A \cdot r}{V_K - V_A} = \frac{2 \cdot r}{3 - 2} = 2r = 0,8 \text{ м}$$

Угловая скорость колеса 2

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{x} = \frac{2 \text{ м/с}}{0,8 \text{ м}} = 2,5 \text{ с}^{-1}$$

Угловое ускорение колеса 2

$$\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{AP} = 0$$

Определение скорости точки B с помощью мгновенного центра скоростей.

$\triangle APB$ :

$$AB = r = 0,4 \text{ м},$$

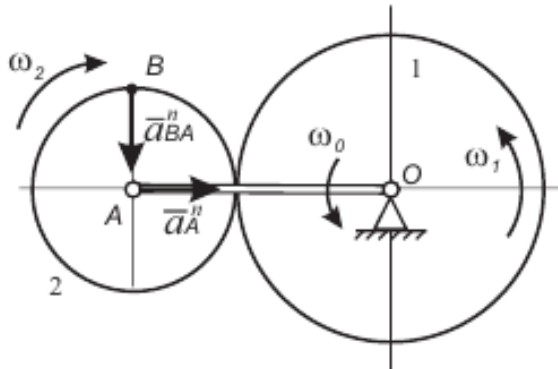
$$AP = x = 0,8 \text{ м}$$

$$BP = \sqrt{AP^2 + AB^2} = \sqrt{(2r)^2 + r^2} = r\sqrt{5} = 0,4 \cdot 2,236 = 0,894 \text{ м}$$

$$V_B = \omega_2 BP = 2,5 \text{ с}^{-1} \cdot 0,894 \text{ м} = 2,235 \text{ м/с}$$

$$\vec{V}_B \perp BP$$

Определение ускорения точки  $B$  по теореме о сложении ускорений



Принимаем за полюс точку  $A$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$$

$$\vec{a}_A^\tau = 0$$

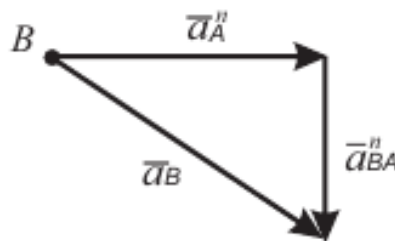
$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 AB = 0$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^n$$

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 AB = \omega_2^2 \cdot r = 2,5^2 \cdot 0,4 = 2,5 \text{ м/с}^2$$

$\vec{a}_{BA}^n$  от точки  $B$  к точке  $A$ ;

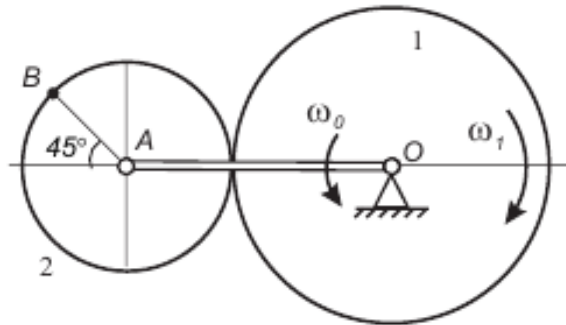
$$a_B = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_{BA}^n)^2} = \sqrt{4^2 + 2,5^2} = 4,717 \text{ м/с}^2$$



Ответ:  $\omega_2 = 2,5 \text{ с}^{-1}$ ,  $V_B = 2,235 \text{ м/с}$ ,  $a_B = 4,717 \text{ м/с}^2$ ,

## Задача 2

Определить скорость и ускорение точки  $B$ , а также угловую скорость колеса 2 (сателлита).



Исходные данные:

$$OA = 1 \text{ м}, r_2 = r = 0,4 \text{ м}, \omega_0 = 2 \text{ с}^{-1}, \omega_1 = 5 \text{ с}^{-1}$$

Найти:  $V_B$ ,  $a_B$ ,  $\omega_2$

### Решение

Скорость и ускорение точки  $A$  кривошипа  $OA$ :

$$V_A = \omega_0 \cdot OA = 2 \cdot 1 = 2 \text{ м/с}$$

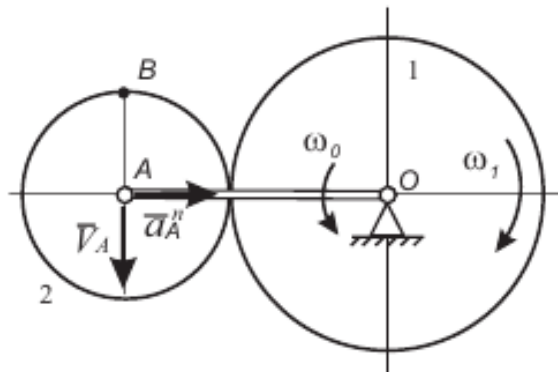
$$\vec{V}_A \perp OA \text{ по направлению } \omega_0$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n$$

$$a_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = 4 \cdot 1 = 4 \text{ м/с}^2$$

$$\vec{a}_A^n \text{ от точки } A \text{ к точке } O;$$

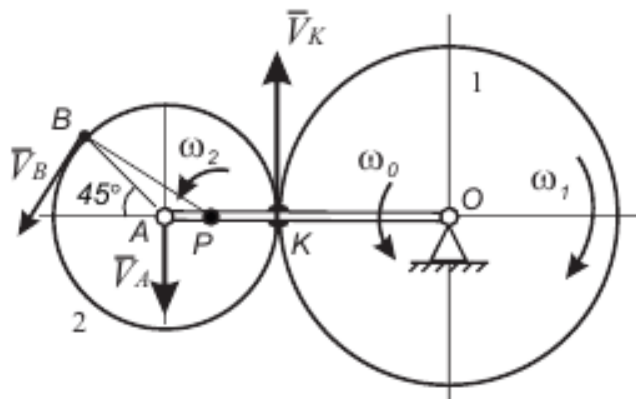
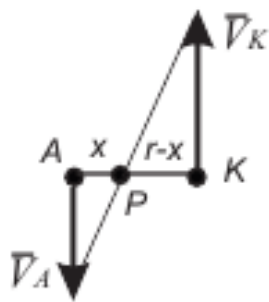
$$a_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot OA = 0$$



Скорость точки  $K$  – точки касания колес 1 и 2.

$$V_K = \omega_1 \cdot R_1 = 5 \cdot 0,6 = 3 \text{ м/с}$$

$$R_1 = OA - r = 1 - 0,4 = 0,6 \text{ м}$$



Определим положение мгновенного центра скоростей  $P$  подвижного колеса 2.

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_K}{KP} \Rightarrow \frac{V_A}{x} = \frac{V_K}{r-x}$$

$$x = \frac{V_A \cdot r}{V_K + V_A} = \frac{2 \cdot r}{3+2} = 0,4r = 0,16 \text{ м}$$

Угловая скорость колеса 2

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{x} = \frac{2 \text{ м/с}}{0,16 \text{ м}} = 12,5 \text{ с}^{-1}$$

Угловое ускорение колеса 2

$$\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{AP} = 0$$

Определение скорости точки  $B$  с помощью мгновенного центра скоростей.

$\triangle APB$ :

$$AB = r = 0,4 \text{ м},$$

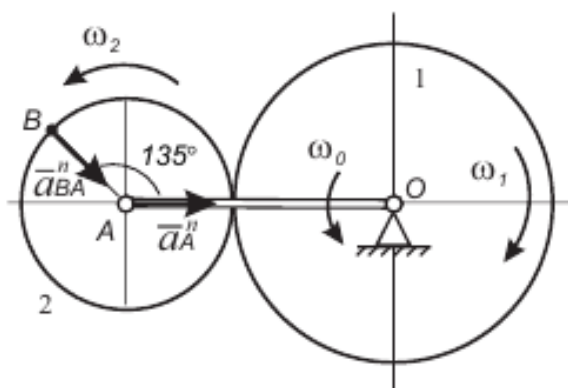
$$AP = x = 0,16 \text{ м}$$

$$BP = \sqrt{AP^2 + AB^2} = \sqrt{0,16^2 + 0,4^2} = 0,431 \text{ м}$$

$$V_B = \omega_2 BP = 12,5 \text{ с}^{-1} \cdot 0,431 \text{ м} = 5,385 \text{ м/с}$$

$$\vec{V}_B \perp BP$$

Определение ускорения точки  $B$  по теореме о сложении ускорений



Принимаем за полюс точку  $A$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau$$

$$\bar{a}_A^\tau = 0$$

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon_2 AB = 0$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n$$

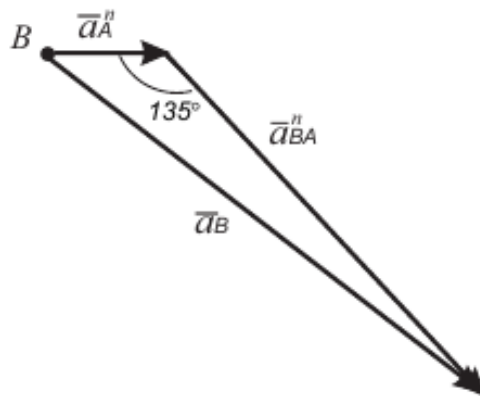
$$a_{BA}^n = \omega_2^2 AB = \omega_2^2 \cdot r = 12,5^2 \cdot 0,4 = 62,5 \text{ м/с}^2$$

$\bar{a}_{BA}^n$  от точки B к точке A;

$$a_B = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_{BA}^n)^2 - 2 \cdot a_A^n \cdot a_{BA}^n \cdot \cos 135^\circ} = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_{BA}^n)^2 + \sqrt{2} \cdot a_A^n \cdot a_{BA}^n} =$$

$$= \sqrt{4^2 + 62,5^2 + \sqrt{2} \cdot 4 \cdot 62,5} = 65,39 \text{ м/с}^2$$

$$\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



Ответ:  $\omega_2 = 12,5 \text{ с}^{-1}$ ,  $V_B = 5,385 \text{ м/с}$ ,  $a_B = 65,39 \text{ м/с}^2$ ,