

# ДИНАМИКА

изучает законы движения материальных тел в зависимости от действующих на них сил

два раздела: **динамика материальной точки**  
**динамика механической системы.**

*Материальная точка* - тело конечных размеров, которое движется поступательно.

*Механическая система* - совокупность материальных точек или тел, в которой движение каждой части зависит от движения всех остальных частей.

## ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

### 1. Закон инерции (первый закон Ньютона)

*Материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока силы, действующие на точку, взаимно уравновешиваются.*

Свойство тела сохранять состояние покоя или равномерного движения называется *инертностью* тела.

Мерой инертности тела является его *масса*.

### 2. Основной закон динамики (второй закон Ньютона)

*Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет такое же направление.*

$$m\bar{a} = \bar{F}$$

Где  $\bar{F}$  – сила,  $\bar{a}$  - ускорение точки,  $m$  – масса материальной точки.

### 3. Закон равенства действия и противодействия (третий закон Ньютона)

*Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.*

При взаимодействии двух тел, силы, приложенные к каждому из них, равны по величине и противоположны по направлению. Эти силы не образуют уравновешенную систему сил, так как они приложены к разным телам.

### 4. Принцип независимости действия сил

*Точка или тело, находящееся под действием системы сил, получает ускорение равное геометрической сумме ускорений, сообщаемых телу действием каждой силы в отдельности.*

# ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Основной закон динамики, устанавливающий связь между массой точки, её ускорением и действующими на точку силами, можно рассматривать одновременно как дифференциальное уравнение движения в векторной форме:

$$m\bar{a} = \sum_k \bar{F}_k$$

Дифференциальное уравнение в векторной форме, эквивалентно трём скалярным уравнениям.

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = \sum_k F_{kx} \\ m\ddot{y} = \sum_k F_{ky} \\ m\ddot{z} = \sum_k F_{kz} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{дифференциальные} \\ \text{уравнения движения} \\ \text{материальной точки} \end{array}$$

Согласно принципу независимости действия сил, движение материальной точки под действием сил

$$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$$

будет таким же, как и при действии одной силы, равной геометрической сумме слагаемых сил (равнодействующей).

# ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

**Количество движения точки**

$$\bar{q} = m \bar{v} \quad [кг \cdot м / с]$$

m – масса точки,  $\bar{v}$  - вектор скорости точки

**Кинетическая энергия точки**

$$T = \frac{m v^2}{2} \quad [дж] = [Н \cdot м] = [кг \cdot м^2 / с^2]$$

v - модуль скорости точки

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ НА ТОЧКУ

**Импульс силы**  $\bar{F}$  за промежуток времени  $[t_0; t_1]$

$$\bar{S} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F} dt \quad [кг \cdot м / с]$$

$$\bar{F} = const \quad \longrightarrow \quad \bar{S} = \bar{F}(t_1 - t_0)$$

# ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

## ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ НА ТОЧКУ

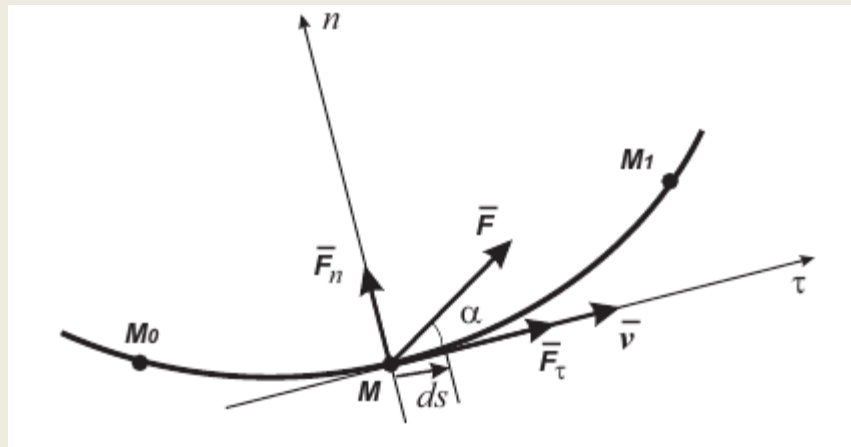
**Работа силы** - характеризует то действие силы, которым определяется изменение модуля скорости движущейся точки

Элементарная работа силы

$$dA = F_{\tau} \cdot ds = F \cos \alpha \cdot ds$$

$F_{\tau}$  - проекция силы  $\vec{F}$  на направление скорости  $\vec{v}$  точки М;  $ds$  — модуль элементарного перемещения точки М.

Работа силы на конечном перемещении  $M_0M_1$



$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dA = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{\tau} \cdot ds \quad [дж] = [H \cdot м] = [кг \cdot м^2 / с^2]$$

$$F_{\tau} = const \quad \longrightarrow \quad A = F_{\tau} \cdot s_1, \quad \text{где } s_1 \text{ — перемещение } M_0M_1$$

**Мощность** — работа, совершаемая силой в единицу времени

$$N = \frac{dA}{dt} = F_{\tau} \frac{ds}{dt} = F_{\tau} \cdot v \quad [вт] = \left[ \frac{дж}{сек} \right] = [H \cdot м / с]$$

$v$  - модуль скорости точки

$$N = const \quad \longrightarrow \quad A = N \cdot \Delta t$$

# ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

## ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Общие теоремы – следствия основного закона динамики

### ***Теорема об изменении количества движения точки***

В дифференциальной форме: 
$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \sum \bar{F}_k$$

производная по времени от количества движения точки равна сумме действующих на точку сил.

В конечном виде:

$$m\bar{v}_I - m\bar{v}_0 = \sum \int_{t_0}^{t_I} \bar{F}_k dt = \sum \bar{S}_k$$

изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени  $[t_0; t_I]$  равно сумме импульсов всех действующих на точку сил за тот же промежуток времени.

### ***Теорема об изменении кинетической энергии точки***

В дифференциальной форме: 
$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_k$$
  $dA_k$  - элементарная работа силы  $\bar{F}_k$

В конечном виде: 
$$\frac{mv_I^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{k(M_0M_I)}$$

изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении  $(M_0M_I)$  равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Механическая система* - совокупность материальных точек или тел,  
в которой движение каждой части зависит от движения всех остальных частей.

## ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ

Силы, действующие на точки любой механической системы можно разделить на внешние и внутренние силы.

**Внешними**  $\vec{F}_k^e$  (от *exterior* – внешний) называют силы, действующие на систему со стороны материальных точек или тел, не входящих в состав данной системы

**Внутренними**  $\vec{F}_k^i$  (от *interior* – внутренний) называют силы взаимодействия между материальными точками или телами данной механической системы

Движение механической системы зависит как от внешних, так и внутренних сил.

### *Свойства внутренних сил*

На основании закона равенства действия и противодействия каждой внутренней силе соответствует другая внутренняя сила, равная ей по модулю и противоположная по направлению.

Из этого следует:

1. *Главный вектор (геометрическая сумма) всех внутренних сил системы равен нулю.*
2. *Главный момент (сумма моментов) всех внутренних сил системы относительно любого центра равен нулю*

Система внутренних сил не уравновешенная, так как они приложены к различным точкам системы и могут вызывать перемещения этих точек относительно друг друга. Внутренние силы взаимно уравновешивают друг друга только у абсолютно твердых, недеформируемых тел.

# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Механическая система* - совокупность материальных точек или тел,  
в которой движение каждой части зависит от движения всех остальных частей.

## Масса системы. Центр масс

**Масса** механической системы  $M$  равна арифметической сумме масс точек системы.

$$M = \sum m_k$$

**Центр масс** механической системы - геометрическая точка  $C$ , положение которой определяется радиусом-вектором по формуле

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}$$

где  $M$  - масса системы,  $\vec{r}_k$  — радиус-вектор  $k$ -ой материальной точки системы.

### Координаты центра масс

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}$$

$$y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}$$

$$z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}$$

Центр масс характеризует распределение масс в системе.

Центр масс твердого тела совпадает с его центром тяжести.

# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Механическая система* - совокупность материальных точек или тел,  
в которой движение каждой части зависит от движения всех остальных частей.

## МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Распределение масс в системе помимо центра масс описывают моменты инерции: *осевые и центробежные*.

**Осевым моментом инерции** тела (системы) относительно данной оси  $Oz$  называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадрат расстояния до этой оси:

$$J_z = \sum m_k h_k^2$$

Квадрат расстояния до оси  $z$  равен  $h_k^2 = x_k^2 + y_k^2$ , тогда

$$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2);$$

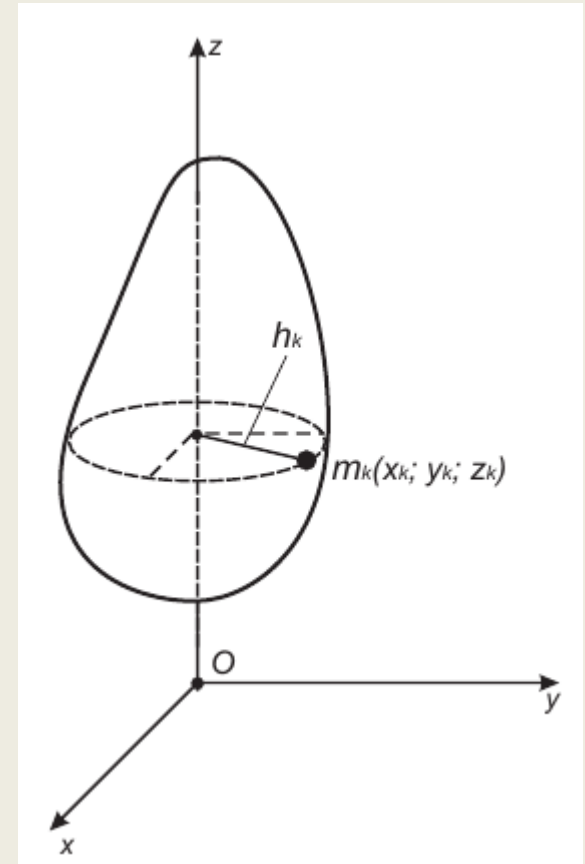
$$J_y = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2);$$

$$J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2);$$

Осевой момент инерции тела (системы) является величиной положительной и не равной нулю. Он является мерой инертности тела при вращательном движении.

Для сплошного однородного тела  $J_z = \gamma \int_V h^2 dV;$

$\gamma = \text{const}$  - плотность тела  $[\text{кг}/\text{м}^3]$ ,  $V$  - объем тела.



# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Механическая система* - совокупность материальных точек или тел,  
в которой движение каждой части зависит от движения всех остальных частей.

## МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

### **Радиус инерции тела**

Момент инерции относительно заданной оси можно представить в виде произведения массы тела на квадрат линейной величины, называемой *радиусом инерции* тела относительно этой оси. *Радиусом инерции* тела относительно оси  $Oz$  называется расстояние  $\rho_z$  от оси до точки, в которой нужно сосредоточить массу всего тела  $M$ , чтобы момент инерции точки относительно этой оси равнялся моменту инерции тела относительно той же оси:

$$J_z = M\rho_z^2$$

### **Центробежные моменты инерции**

Для учёта асимметрии в распределении масс, кроме осевых моментов инерции  $J_x, J_y, J_z$ , вводят центробежные моменты инерции

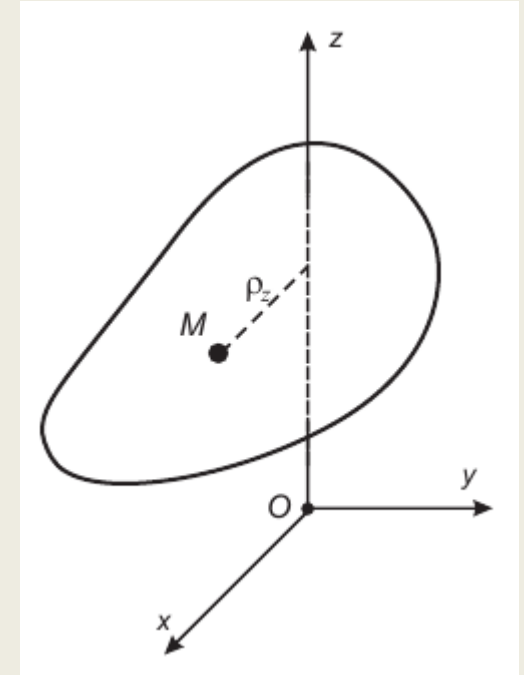
$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k$$

$$J_{yz} = \sum m_k y_k z_k$$

$$J_{zx} = \sum m_k z_k x_k$$

*центробежным моментом инерции системы материальных точек относительно пары осей называется сумма произведений масс точек на их координаты (расстояния до осей)*

Для сплошного однородного тела  $J_{xy} = \gamma \int_V xy dV;$



Размерность моментов инерции  
(осевых, центробежных)

$$[ \text{кг} \cdot \text{м}^2 ]$$

Центробежные моменты инерции, в отличие от осевых моментов инерции, могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Главные оси и главные моменты инерции

Оси, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю, называются **главными осями**.

Например, если  $J_{xz} = J_{yz} = 0$ , то ось  $Oz$  — главная ось инерции тела.

**Главной центральной осью инерции** называется главная ось инерции, проходящая через центр масс.

Моменты инерции относительно главных осей называются **главными моментами инерции**.

Из свойств симметрии следует:

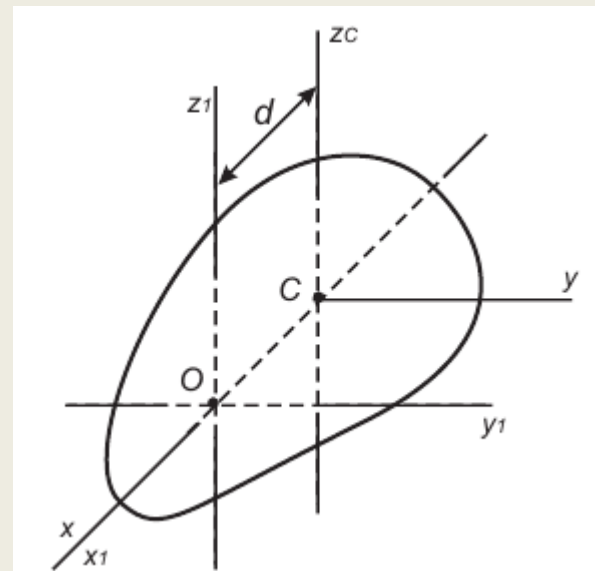
1. Если тело имеет плоскость материальной симметрии, то для всех её точек ось, перпендикулярная к плоскости симметрии, является главной осью.
2. Если тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции.

## Моменты инерции относительно параллельных осей

**теорема Гюйгенса-Штейнера:**

Момент инерции тела  $J_{z_1}$  относительно данной оси  $z_1$  равен моменту инерции  $J_{z_c}$  относительно оси  $z_c$  ей параллельной и проходящей через центр масс тела  $C$ , плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.

$$J_z = J_{z_c} + Md^2$$



# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

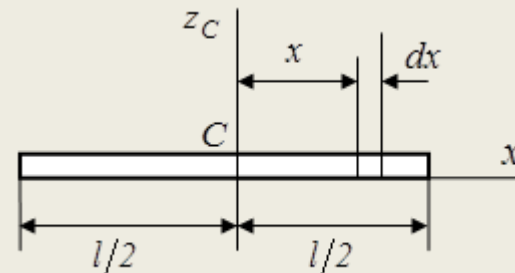
## Моменты инерции однородных тел

### Однородный тонкий стержень

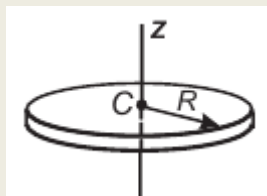
Длина стержня  $l$ , масса  $M$ . Масса единицы длины  $\rho = \frac{M}{l}$ . Масса элемента длины  $dm = \rho \cdot dx$

момент инерции стержня относительно оси  $Z_c$ :

$$I_{z_c} = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 \rho dx = \frac{M}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{M}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \bigg|_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} = \frac{Ml^2}{12}$$



### Однородная круглая пластина малой толщины

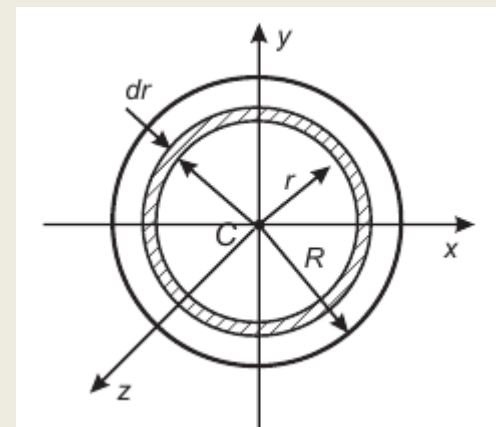


Определим момент инерции однородной круглой пластины относительно оси  $Z_c$ , проходящей через центр круга, перпендикулярно к его плоскости

$R$  - радиус,  $M$  – масса пластины. Масса единицы площади  $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$

Разобьем пластину на множество элементарных колец радиусом  $r$  и шириной  $dr$ .

Масса элементарного кольца  $dm = \rho \cdot 2\pi \cdot dr$



$$J_{z_c} = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho \cdot 2\pi \cdot dr = 2\pi \rho \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{M}{\pi R^2} \frac{r^4}{4} \bigg|_0^R = \frac{MR^2}{2}$$

# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Моменты инерции однородных тел

### *Однородный круглый цилиндр*

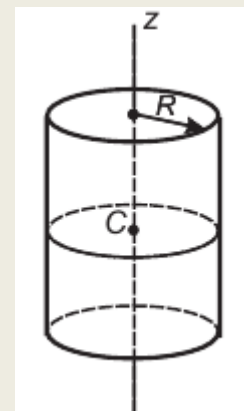
Определим момент инерции однородного круглого цилиндра относительно продольной оси цилиндра  $Z_c$

Предположим, что цилиндр радиусом  $R$  имеет массу  $M$ .

Разобьём цилиндр на множество тонких однородных пластин параллельных основанию цилиндра. Масса каждой элементарной пластины  $m_i$

Момент инерции цилиндра относительно оси определим как сумму моментов инерции элементарных пластин относительно этой же оси:

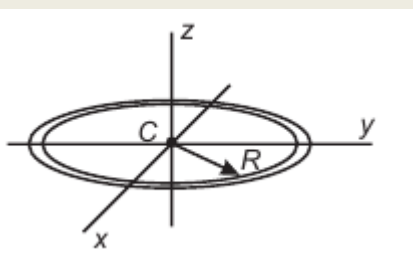
$$J_{z_c} = \sum \frac{m_i R^2}{2} = \frac{R^2}{2} \sum m_i = \frac{MR^2}{2}$$



### *Тонкое круглое однородное кольцо или цилиндрическая оболочка*

Определим момент инерции относительно оси  $Z_c$ , перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр  $C$ .

$R$  - радиус кольца,  $M$  - масса.

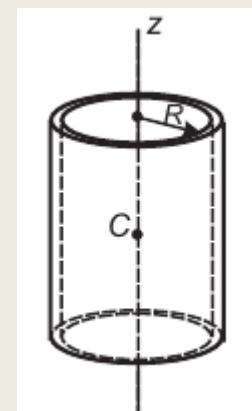


Все точки кольца находятся от оси  $Z_c$  на расстоянии  $R$

Момент инерции кольца:

$$J_{z_c} = \sum m_i R^2 = MR^2$$

Такой же результат получим для тонкой цилиндрической оболочки массы  $M$  и радиуса  $R$  относительно ее продольной оси  $Z_c$ .



# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Механическая система* - совокупность материальных точек или тел,  
в которой движение каждой части зависит от движения всех остальных частей.

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ

По основному закону динамики для каждой точки системы

$$m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$$

$m_k$  - масса точки,  $\bar{F}_k^e$  - равнодействующая внешних сил,  $\bar{F}_k^i$  - равнодействующая внутренних сил

Дифференциальные уравнения движения системы  $n$  точек в векторной форме

$$m_1 \bar{a}_1 = \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i$$

$$m_2 \bar{a}_2 = \bar{F}_2^e + \bar{F}_2^i$$

... ..

$$m_n \bar{a}_n = \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i$$

# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Механическая система* - совокупность материальных точек или тел,  
в которой движение каждой части зависит от движения всех остальных частей.

## ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

### Теорема о движении центра масс

$$M \bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e$$

произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил. Или: центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

### **Закон сохранения движения центра масс**

$$\text{Пусть} \quad \sum \bar{F}_k^e = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v}_C = \text{const}$$

Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то центр масс этой системы движется с постоянной по модулю и направлению скоростью, т. е. равномерно и прямолинейно.

**Следствие:** Внутренние силы не влияют на движение центра масс

# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

## ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

### Теорема об изменении количества движения системы

#### *Количество движения системы*

Количеством движения системы будем называть векторную величину  $\bar{Q}$ , равную геометрической сумме векторов количества движения всех точек системы

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k$$

количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость ее центра масс

$$\bar{Q} = M \bar{v}_C$$

количество движения представляет собой характеристику поступательного движения системы, при вращении вокруг центра масс  $\bar{Q} = 0$

**Дифференциальная форма теоремы:**

$$\frac{d(\bar{Q})}{dt} = \sum \bar{F}_k^e$$

производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме действующих на систему внешних сил.

**Интегральная форма теоремы:**

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}_k^e dt = \sum \bar{S}_k^e$$

изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени  $[t_0; t_1]$  равно сумме импульсов всех действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.

#### **Закон сохранения количества движения**

Пусть 
$$\sum \bar{F}_k^e = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{Q} = const$$

Если сумма всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то вектор количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению.

**Следствие:** Внутренние силы изменить количество движения системы не могут.

# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

## ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

### Теорема об изменении кинетической энергии системы

#### *Кинетическая энергия системы*

Кинетической энергией системы называется скалярная величина  $T$ , равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$$

Кинетическая энергия является характеристикой и поступательного, и вращательного движений системы. Она не зависит от направлений движения частей системы. На ее изменение влияет действие и внешних, и внутренних сил.

#### *Кинетическая энергия твердого тела*

##### **1. Поступательное движение твердого тела**

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2} M v_C^2$$

кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс.

##### **2. Вращательное движение твердого тела**

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$

кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

##### **3. Плоскопараллельное движение твердого тела**

$$T_{\text{плоск}} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_{z_C} \omega^2$$

при плоскопараллельном движении кинетическая энергия тела равна энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

## ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

### Теорема об изменении кинетической энергии системы

*Дифференциальная форма теоремы*

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

$dA_k^e$   $dA_k^i$  - элементарные работы действующих на точку системы массой  $m_k$  внешних и внутренних сил.

*Интегральная форма теоремы*

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i$$

изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

*Теорема об изменении кинетической энергии твердого тела*

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e$$

в случае твердого недеформируемого тела сумма работ всех внутренних сил равна нулю  $\sum A_k^i = 0$

*Теорема об изменении кинетической энергии системы с идеальными связями*

Разделим все действующие на систему внешние и внутренние силы на **активные и реакции связей**.

Тогда теорема об изменении кинетической энергии системы может быть представлена в виде:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^a + \sum A_k^r$$

**Идеальные связи** – это связи, реакции которых не совершают работу на элементарном перемещении системы:

$$\sum dA_k^r = 0$$

т.е. сумма элементарных работ реакций идеальных связей равна нулю.

*Для системы с идеальными связями теорема об изменении кинетической энергии имеет вид:*

$$dT = \sum dA_k^a$$

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^a$$

изменение кинетической энергии системы с идеальными связями при любом ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении приложенных к системе внешних и внутренних **активных** сил.

Это позволяет исключить из рассмотрения все неизвестные реакции связей.

# ДИНАМИКА СИСТЕМЫ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

## ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

### Теорема об изменении кинетической энергии системы

*Теорема об изменении кинетической энергии системы с идеальными связями*

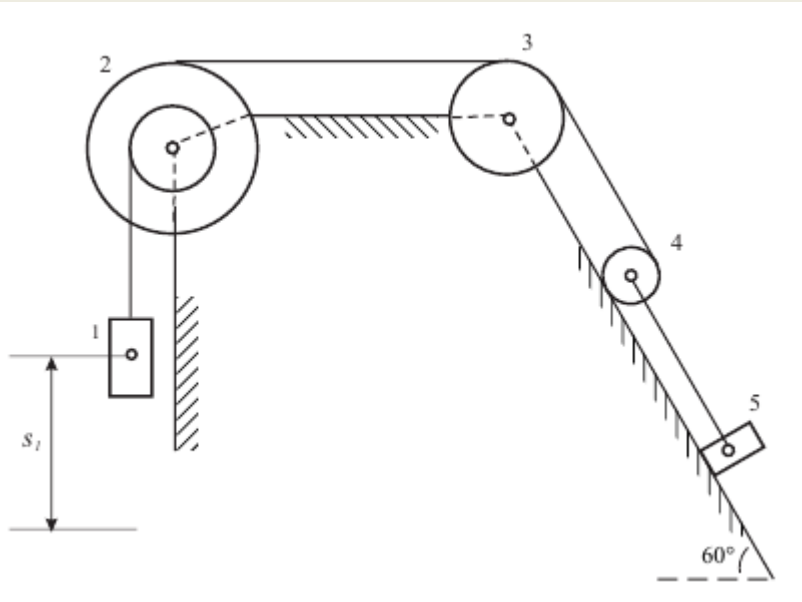
$$T_I - T_0 = \sum A_k^a$$

**Идеальные связи** – это связи, реакции которых не совершают работу на элементарном перемещении системы

**Примеры идеальных связей:** идеально-гладкая поверхность, шарнир без трения, нерастяжимая нить, шероховатая поверхность при качении колеса без проскальзывания.

**Примеры неидеальных связей:** шероховатая поверхность при скольжении по ней тела (работу совершает сила трения), пружина (работу совершает сила упругости), шарнир или подшипник с трением (работу совершает момент трения).

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



## Задача 1

Механическая система состоит из грузов 1 и 5, ступенчатого шкива 2, блока 3 (масса равномерно распределена по ободу) и катка 4 (сплошной однородный цилиндр). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми невесомыми нитями.

Под действием сил тяжести механическая система приходит в движение из состояния покоя. Каток катится по шероховатой наклонной плоскости без проскальзывания

Определить скорость груза 1 в момент времени, когда он пройдет путь равный  $s_1$ .

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m; m_4=m; m_5=2m;$$

$$R_2=3r; r_2=1,5r; \text{ радиус инерции шкива } \rho_2=2r; R_3=2r; r_4=r;$$

коэффициент трения груза 5 о наклонную плоскость  $f=0,2$ ;

$$s_1=1 \text{ м.}$$

Найти:  $V_1$

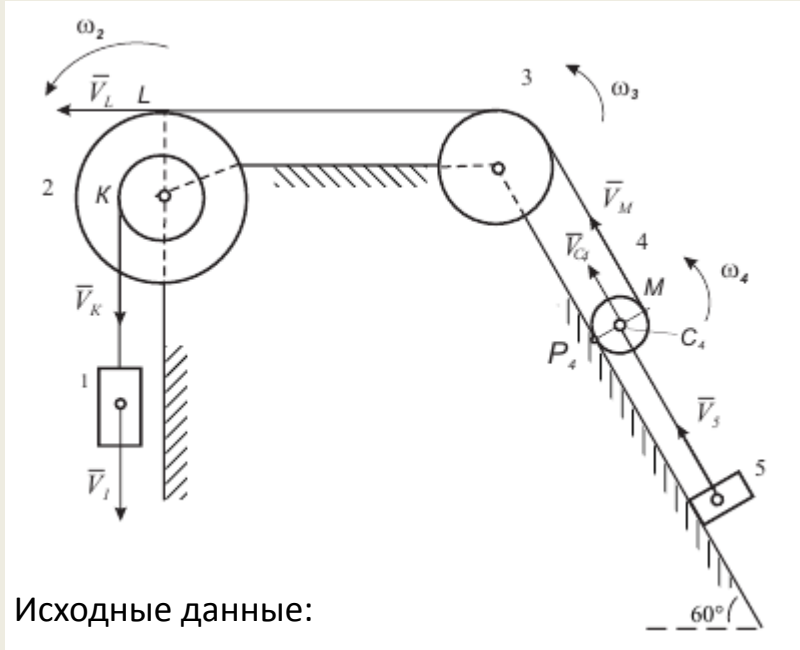
**Теорема об изменении кинетической энергии системы с идеальными связями**

$$T - T_0 = \sum A_k^a$$

**Примечание:** В случае неидеальной связи - шероховатая поверхность, при скольжении тела по которой работу совершает сила трения, будем рассматривать силу трения, как активную силу

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями

## Решение



Исходные данные:

$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m; m_4=m; m_5=2m;$   
 $R_2=3r; r_2=1,5r; \text{ радиус инерции } \rho_2=2r; R_3=2r; r_4=r;$   
 $f=0,2; s_1=1 \text{ м.}$

Найти:  $V_1$

**Теорема об изменении кинетической энергии**

$$T - T_0 = \sum A_k^a$$

**Примечание:** Так как в начальный момент времени система находилась в покое  $T_0 = 0$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$$

**Груз 1** совершает поступательное движение

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

**Шкив 2** совершает вращательное движение

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

Момент инерции шкива

$$J_2 = m_2 \rho_2^2$$

**Блок 3** совершает вращательное движение

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$$

Момент инерции блока

$$J_3 = m_3 R_3^2$$

**Каток 4** совершает плоскопараллельное движение ( $C_4$  – центр масс,  $P_4$  – мгновенный центр скоростей)

$$T_4 = \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 + \frac{1}{2} m_4 V_{C_4}^2$$

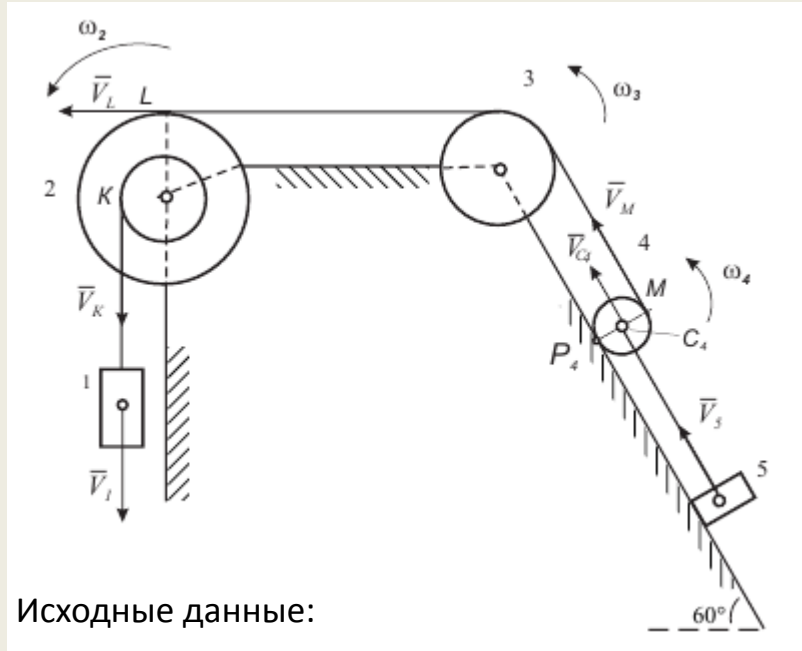
Момент инерции катка

$$J_4 = \frac{1}{2} m_4 r_4^2$$

**Груз 5** совершает поступательное движение

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 V_5^2$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m; m_4=m; m_5=2m;$$

$$R_2=3r; r_2=1,5r; \text{ радиус инерции } \rho_2=2r; R_3=2r; r_4=r;$$

$$f=0,2; s_1=1 \text{ м.}$$

Найти:  $V_1$

**Окончательно кинетическая энергия системы равна:**

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = 7,528 \cdot mV_1^2$$

Тогда кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 + \frac{1}{2} m_4 V_{C_4}^2 + \frac{1}{2} m_5 V_5^2$$

**Соотношения между скоростями:**

$$V_K = V_1 \quad \omega_2 = \frac{V_K}{r_2} = \frac{V_1}{1,5r}$$

$$V_L = \omega_2 \cdot R_2 = \frac{V_1}{1,5r} \cdot 3r = 2V_1$$

$$\omega_3 = \frac{V_L}{R_3} = \frac{2V_1}{2r} = \frac{V_1}{r} \quad V_M = V_L = 2V_1$$

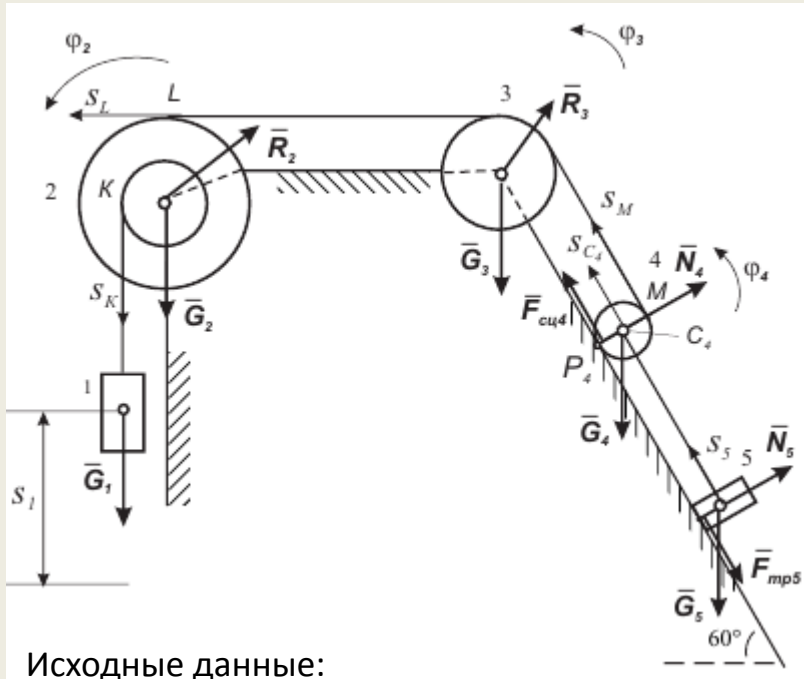
$$\omega_4 = \frac{V_M}{MP_4} = \frac{2V_1}{2r} = \frac{V_1}{r}$$

$$V_{C_4} = \omega_4 \cdot C_4 P_4 = \frac{V_1}{r} \cdot r = V_1 \quad V_5 = V_{C_4} = V_1$$

Подставим соотношения между скоростями:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \rho_2^2 \left( \frac{V_1}{1,5r} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 R_3^2 \left( \frac{V_1}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m_4 r^2 \left( \frac{V_1}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 V_1^2 + \\ &+ \frac{1}{2} m_5 V_1^2 = \frac{1}{2} 4m V_1^2 + \frac{1}{2} 2m (2r)^2 \left( \frac{V_1}{1,5r} \right)^2 + \frac{1}{2} m (2r)^2 \left( \frac{V_1}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \left( \frac{V_1}{r} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{2} 2m V_1^2 = \left( 2 + \frac{4}{2,25} + 2 + 0,25 + 0,5 + 1 \right) \cdot m V_1^2 \end{aligned}$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m; m_4=m; m_5=2m;$   
 $R_2=3r; r_2=1,5r; \text{ радиус инерции } \rho_2=2r; R_3=2r; r_4=r;$   
 $f=0,2; s_1=1 \text{ м.}$

Найти:  $V_1$

**Сумма работ активных сил** на перемещении системы, соответствующем перемещению  $s_1$  груза 1:

$$\sum A_k^e = A_{G_1} + A_{G_4} + A_{G_5} + A_{F_{mp5}}$$

$$A_{G_1} = +G_1 \cdot s_1 = +m_1 g \cdot s_1$$

$$A_{G_4} = -G_4 \cdot s_{C_4} \cdot \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} m_4 g \cdot s_{C_4}$$

$$A_{G_5} = -G_5 \cdot s_5 \cdot \sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} m_5 g \cdot s_5$$

$$A_{F_{mp5}} = -F_{mp5} \cdot s_5 = -f \cdot G_5 \cdot \cos 60^\circ \cdot s_5 = -0,5 f m_5 g \cdot s_5$$

Сила трения скольжения по закону Кулона равна:

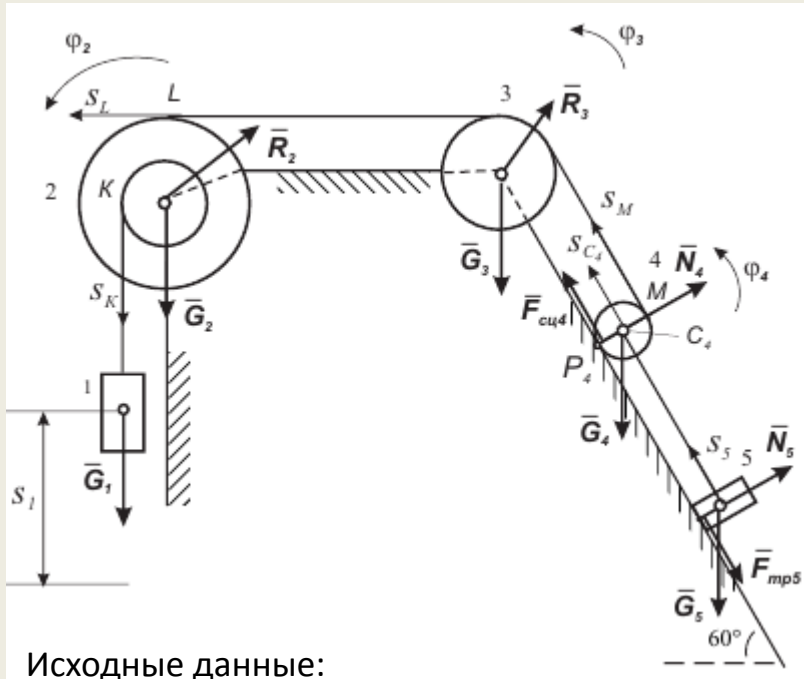
$$F_{mp5} = f \cdot N_5 = f \cdot G_5 \cdot \cos 60^\circ$$

Соотношения между перемещениями связаны такими же кинематическими соотношениями, что и соотношения между скоростями

$$\begin{aligned} V_i &\Rightarrow s_i \\ \omega_i &\Rightarrow \varphi_i \end{aligned}$$

**Примечание:** В случае неидеальной связи - шероховатая поверхность, при скольжении тела по которой работу совершает сила трения, будем рассматривать силу трения, как активную силу

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m; m_4=m; m_5=2m;$   
 $R_2=3r; r_2=1,5r; \text{ радиус инерции } \rho_2=2r; R_3=2r; r_4=r;$   
 $f=0,2; s_1=1 \text{ м.}$

Найти:  $V_1$

**Соотношения  
между  
скоростями:**

$$V_K = V_1$$

$$\omega_2 = \frac{V_K}{r_2} = \frac{V_1}{1,5r}$$

$$V_L = \omega_2 \cdot R_2 = \frac{V_1}{1,5r} \cdot 3r = 2V_1$$

$$\omega_3 = \frac{V_L}{R_3} = \frac{2V_1}{2r} = \frac{V_1}{r}$$

$$V_M = V_L = 2V_1$$

$$\omega_4 = \frac{V_M}{MP_4} = \frac{2V_1}{2r} = \frac{V_1}{r}$$

$$V_{C_4} = \omega_4 \cdot C_4P_4 = \frac{V_1}{r} \cdot r = V_1$$

$$V_5 = V_{C_4} = V_1$$

**Соотношения между  
перемещениями:**

$$s_K = s_1$$

$$\varphi_2 = \frac{s_1}{1,5r}$$

$$s_L = 2s_1$$

$$\varphi_3 = \frac{s_1}{r}$$

$$s_M = 2s_1$$

$$\varphi_4 = \frac{s_1}{r}$$

$$s_{C_4} = s_1$$

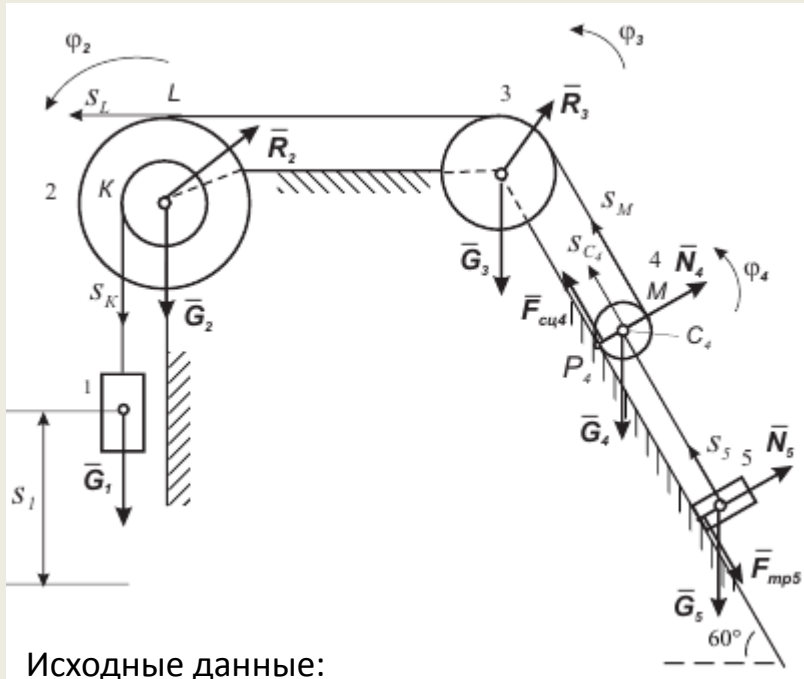
$$s_5 = s_1$$

$$\boxed{V_i \Rightarrow s_i}$$

$$\boxed{\omega_i \Rightarrow \varphi_i}$$

**Примечание:** Соотношения между перемещениями связаны такими же кинематическими соотношениями, что и соотношения между скоростями

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m; m_4=m; m_5=2m;$   
 $R_2=3r; r_2=1,5r; \text{ радиус инерции } \rho_2=2r; R_3=2r; r_4=r;$   
 $f=0,2; s_1=1 \text{ м.}$

Найти:  $V_1$

Ответ:  $V_1 = 1,252 \text{ м/с}$

**Сумма работ внешних сил** с учетом соотношений между перемещениями:

$$\begin{aligned} \sum A_k^e &= +m_1 g \cdot s_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} m_4 g \cdot s_{C_4} - \frac{\sqrt{3}}{2} m_5 g \cdot s_5 - 0,5 f m_5 g \cdot s_5 = \\ &= +4mg \cdot s_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} mg \cdot s_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} 2mg \cdot s_1 - 0,5 \cdot 0,2 \cdot 2mg \cdot s_1 = \\ &= \left( +4 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} - 0,2 \right) \cdot mg \cdot s_1 = +1,202 mgs_1 \end{aligned}$$

Приравниваем левую и правую части теоремы:

$$\sum A_k^e = A_{G_1} + A_{G_4} + A_{G_5} + A_{F_{mp5}} = +1,202 mgs_1$$

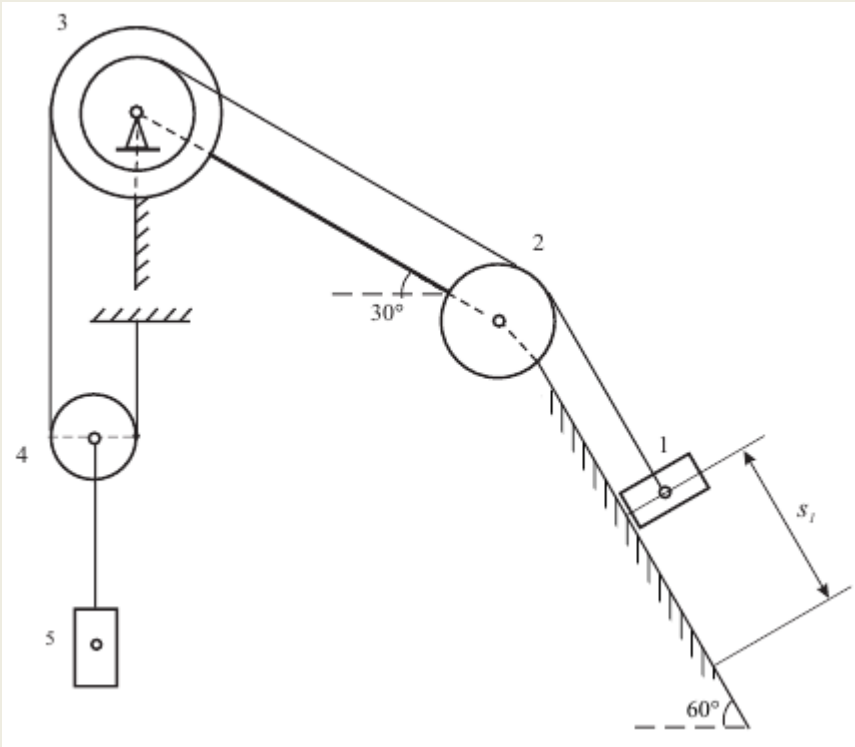
$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = 7,528 \cdot mV_1^2$$

$$7,528 \cdot mV_1^2 = 1,202mg \cdot s_1$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{\frac{1,202 g \cdot s_1}{7,528}} = \sqrt{\frac{1,202 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 1 \text{ м}}{7,528}} = \\ &= \sqrt{\frac{11,792}{7,528}} \text{ м/с} = 1,252 \text{ м/с} \end{aligned}$$

**Примечание:** Положительное значение работы внешних сил говорит о том, что выбранное направление движения системы соответствует действительному. Отрицательный знак работы внешних сил говорит о том, что система движется в направлении противоположном выбранному. В случае отрицательного результата, необходимо поменять направление движения системы и пересчитать работы заново для нового направления.

## Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m; m_5=2m;$$

$R_3=3r$ ;  $r_3=2r$ ; радиус инерции шкива  $\rho_3=r\sqrt{3}$ ;  $r_4=r$ ;  
коэффициент трения груза 1 о наклонную  
плоскость  $f=0,2$ ;  $s_1=1$  м.

Найти:  $V_1$

## Задача 2

Механическая система состоит из грузов 1 и 5, блока 2 (массой пренебречь), ступенчатого шкива 3 и подвижного блока 4 (масса равномерно распределена по ободу). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми невесомыми нитями.

Под действием сил тяжести механическая система приходит в движение из состояния покоя.

Проскальзывания нити по поверхности подвижного блока нет.

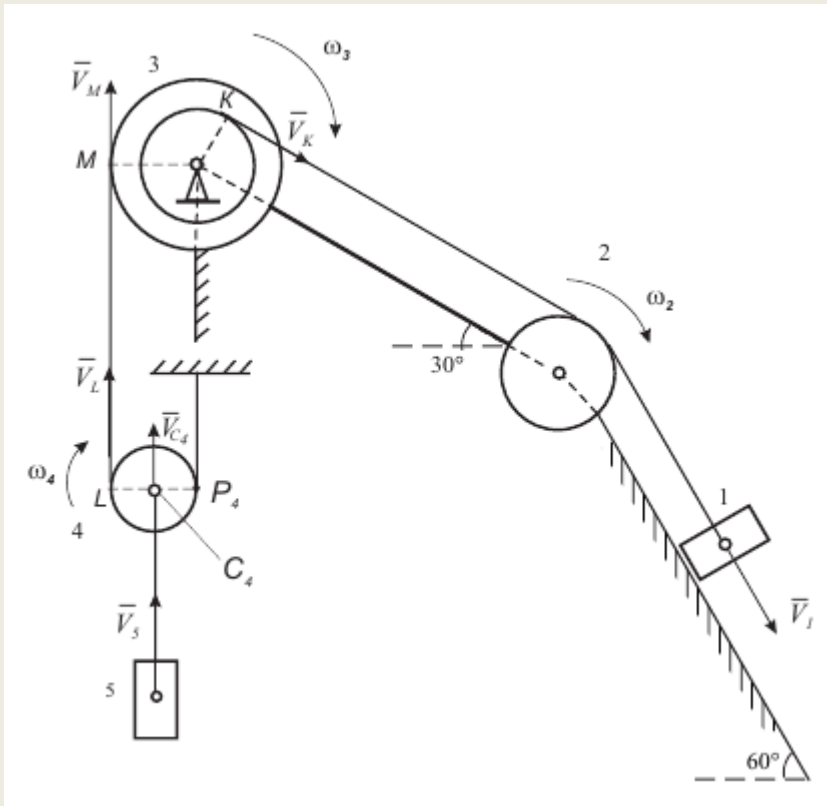
Определить скорость груза 1 в момент времени, когда он пройдет путь равный  $s_1$ .

### **Теорема об изменении кинетической энергии системы с идеальными связями**

$$T - T_0 = \sum A_k^a$$

**Примечание:** Будем рассматривать силу трения, как активную силу

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$ ;  $m_2=0$ ;  $m_3=2m$ ;  $m_4=m$ ;  $m_5=2m$ ;

$R_3=3r$ ;  $r_3=2r$ ; радиус инерции шкива  $\rho_3=r\sqrt{3}$ ;  $r_4=r$ ;  
коэффициент трения груза 1 о наклонную  
плоскость  $f=0,2$ ;  $s_1=1$  м.

Найти:  $V_1$

Решение

**Теорема об изменении кинетической энергии**

$$T - T_0 = \sum A_k^a$$

Так как в начальный момент времени система находилась в покое

$$T_0 = 0$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_3 + T_4 + T_5$$

**Груз 1** совершает поступательное движение

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

**Шкив 3** совершает вращательное движение

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2$$

Момент инерции шкива

$$J_3 = m_3 \rho_3^2$$

**Блок 4** совершает плоскопараллельное движение ( $C_4$  – центр масс,  $P_4$  – мгновенный центр скоростей)

$$T_4 = \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 + \frac{1}{2} m_4 V_{C_4}^2$$

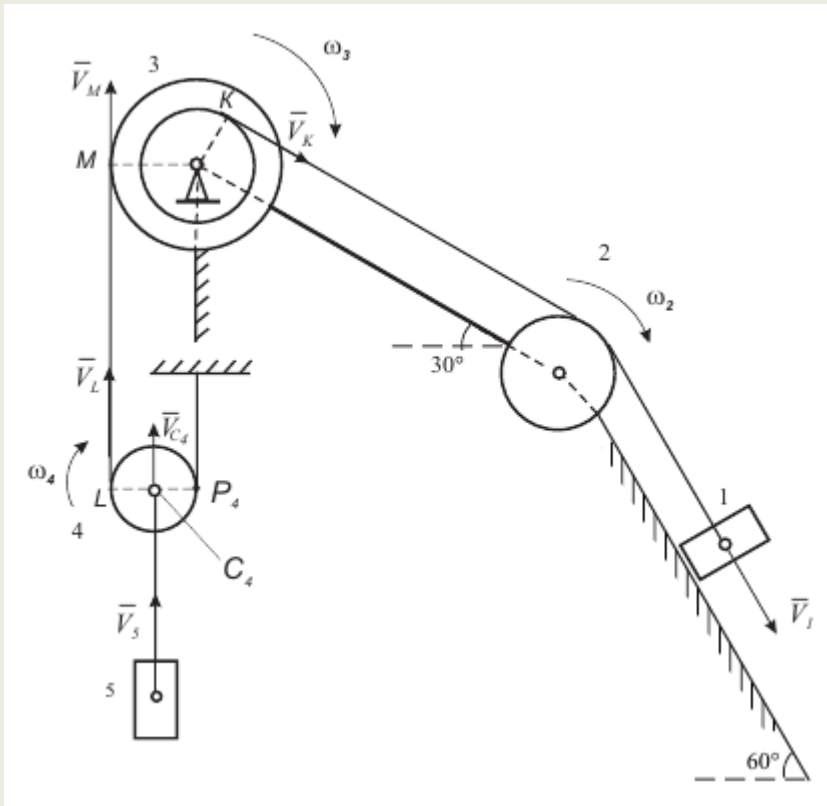
Момент инерции блока

$$J_4 = m_4 R_4^2$$

**Груз 5** совершает поступательное движение

$$T_5 = \frac{1}{2} m_5 V_5^2$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$ ;  $m_2=0$ ;  $m_3=2m$ ;  $m_4=m$ ;  $m_5=2m$ ;  
 $R_3=3r$ ;  $r_3=2r$ ; радиус инерции шкива  $\rho_3=r\sqrt{3}$ ;  $r_4=r$ ;  
 коэффициент трения груза 1 о наклонную  
 плоскость  $f=0,2$ ;  $s_1=1$  м.

Найти:  $V_1$

Тогда кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2 + \frac{1}{2} m_4 V_{C_4}^2 + \frac{1}{2} m_5 V_s^2$$

**Соотношения между скоростями:**

$$V_K = V_1 \qquad \omega_3 = \frac{V_K}{r_3} = \frac{V_1}{2r}$$

$$V_M = \omega_3 \cdot R_3 = \frac{V_1}{2r} \cdot 3r = 1,5V_1$$

$$V_L = V_M$$

$$\omega_4 = \frac{V_L}{LP_4} = \frac{1,5V_1}{2r_4} = 0,75 \frac{V_1}{r}$$

$$V_{C_4} = \omega_4 \cdot C_4P_4 = 0,75 \frac{V_1}{r} \cdot r = 0,75V_1$$

$$V_5 = V_{C_4} = 0,75V_1$$

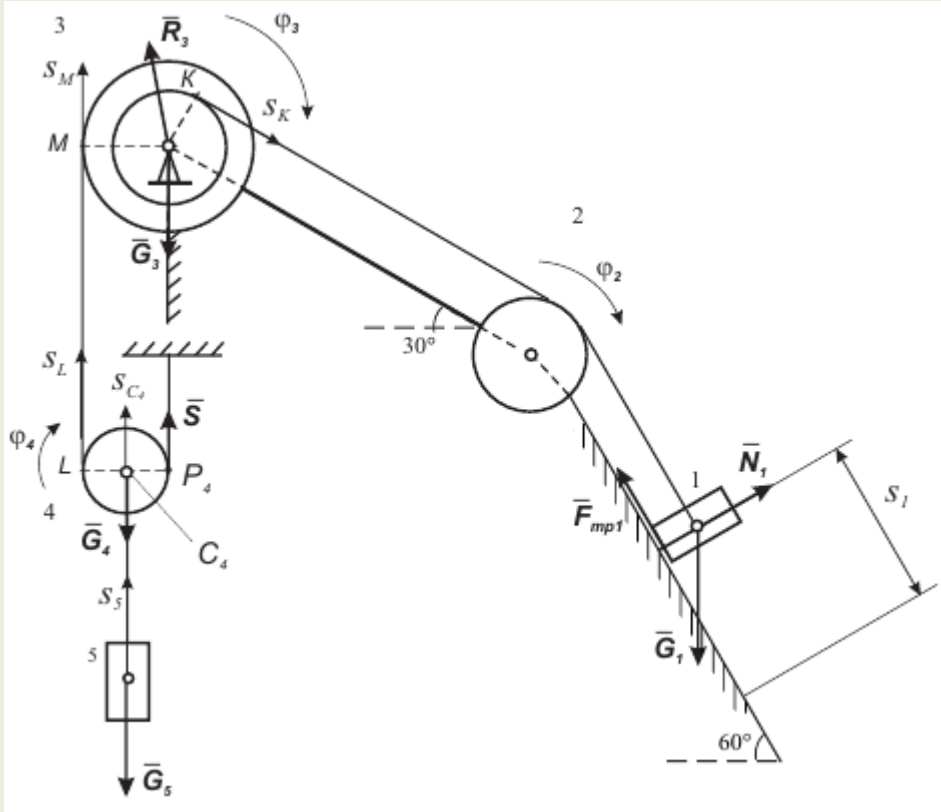
Подставим соотношения между скоростями:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_3 \rho_3^2 \left( \frac{V_1}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 r_4^2 \left( 0,75 \frac{V_1}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m_4 (0,75V_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} m_5 (0,75V_1)^2 = \frac{1}{2} 4m V_1^2 + \frac{1}{2} 2m \cdot 3r^2 \left( \frac{V_1}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left( 0,75 \frac{V_1}{r} \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} m (0,75V_1)^2 + \frac{1}{2} 2m (0,75V_1)^2 = (2 + 0,75 + 2 \cdot (0,75)^2) \cdot m V_1^2 \end{aligned}$$

**Окончательно кинетическая энергия системы равна:**

$$T = T_1 + T_3 + T_4 + T_5 = 3,875 \cdot m V_1^2$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



**Сумма работ активных сил** на перемещении системы, соответствующем перемещению  $s_1$  груза 1:

$$\sum A_k^e = A_{G_1} + A_{F_{mp1}} + A_{G_4} + A_{G_5}$$

$$A_{G_1} = +G_1 \cdot s_1 \cdot \sin 60^\circ = +\frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g \cdot s_1$$

$$A_{F_{mp1}} = -F_{mp1} \cdot s_1 = -f \cdot G_1 \cdot \cos 60^\circ \cdot s_1 = -0,5 f m_1 g \cdot s_1$$

$$A_{G_4} = -G_4 \cdot s_{C_4} = -m_4 g \cdot s_{C_4}$$

$$A_{G_5} = -G_5 \cdot s_5 = -m_5 g \cdot s_5$$

Сила трения скольжения по закону Кулона равна:

$$F_{mp1} = f \cdot N_1 = f \cdot G_1 \cdot \cos 60^\circ$$

Исходные данные:

$m_1=4m$ ;  $m_2=0$ ;  $m_3=2m$ ;  $m_4=m$ ;  $m_5=2m$ ;  
 $R_3=3r$ ;  $r_3=2r$ ; радиус инерции шкива  $\rho_3=r\sqrt{3}$ ;  $r_4=r$ ;  
 коэффициент трения груза 1 о наклонную  
 плоскость  $f=0,2$ ;  $s_1=1$  м.

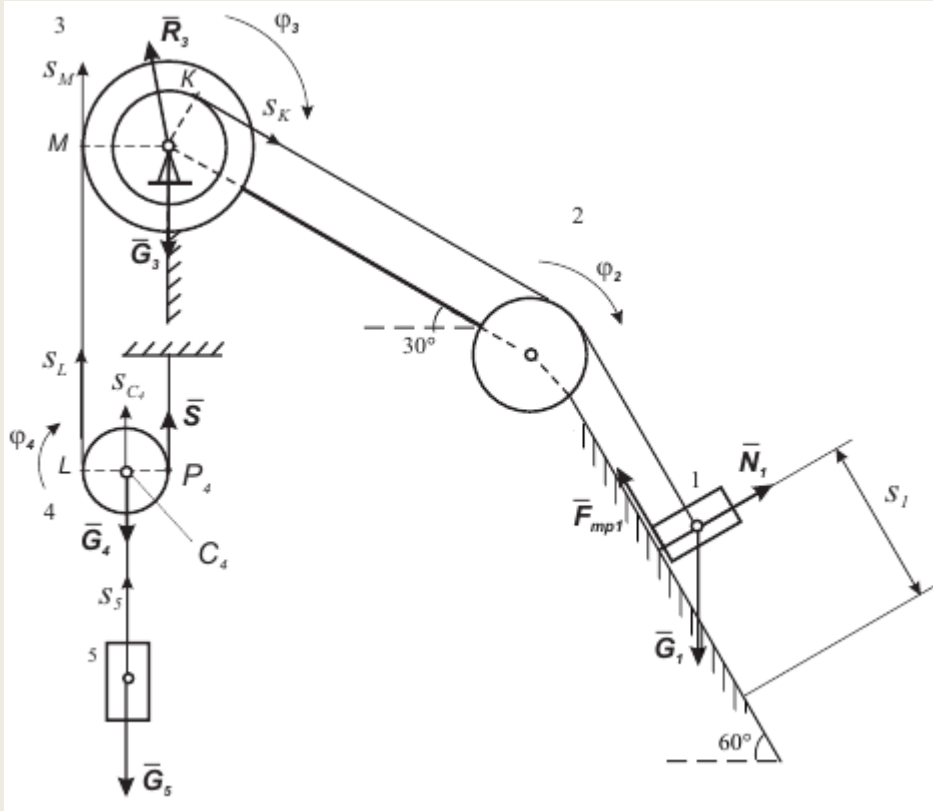
Найти:  $V_1$

Соотношения между перемещениями связаны такими же кинематическими соотношениями, что и соотношения между скоростями

$$\begin{aligned} V_i &\Rightarrow s_i \\ \omega_i &\Rightarrow \varphi_i \end{aligned}$$

**Примечание:** В случае неидеальной связи - шероховатая поверхность, при скольжении тела по которой работу совершает сила трения, будем рассматривать силу трения, как активную силу

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



**Соотношения  
между  
скоростями:**

$$V_K = V_I$$

$$\omega_3 = \frac{V_K}{r_3} = \frac{V_I}{2r}$$

$$V_M = \omega_3 \cdot R_3 = \frac{V_I}{2r} \cdot 3r = 1,5V_I$$

$$V_L = V_M$$

$$\omega_4 = \frac{V_L}{LP_4} = \frac{1,5V_I}{2r_4} = 0,75 \frac{V_I}{r}$$

$$V_{C_4} = \omega_4 \cdot C_4P_4 = 0,75 \frac{V_I}{r} \cdot r = 0,75V_I$$

$$V_5 = V_{C_4} = 0,75V_I$$

**Соотношения между  
перемещениями:**

$$\boxed{V_i \Rightarrow s_i}$$

$$\boxed{\omega_i \Rightarrow \varphi_i}$$

$$s_K = s_I$$

$$\varphi_3 = \frac{s_I}{2r}$$

$$s_M = 1,5s_I$$

$$s_L = s_M$$

$$\varphi_4 = 0,75 \frac{s_I}{r}$$

$$s_{C_4} = 0,75s_I$$

$$s_5 = 0,75s_I$$

Исходные данные:

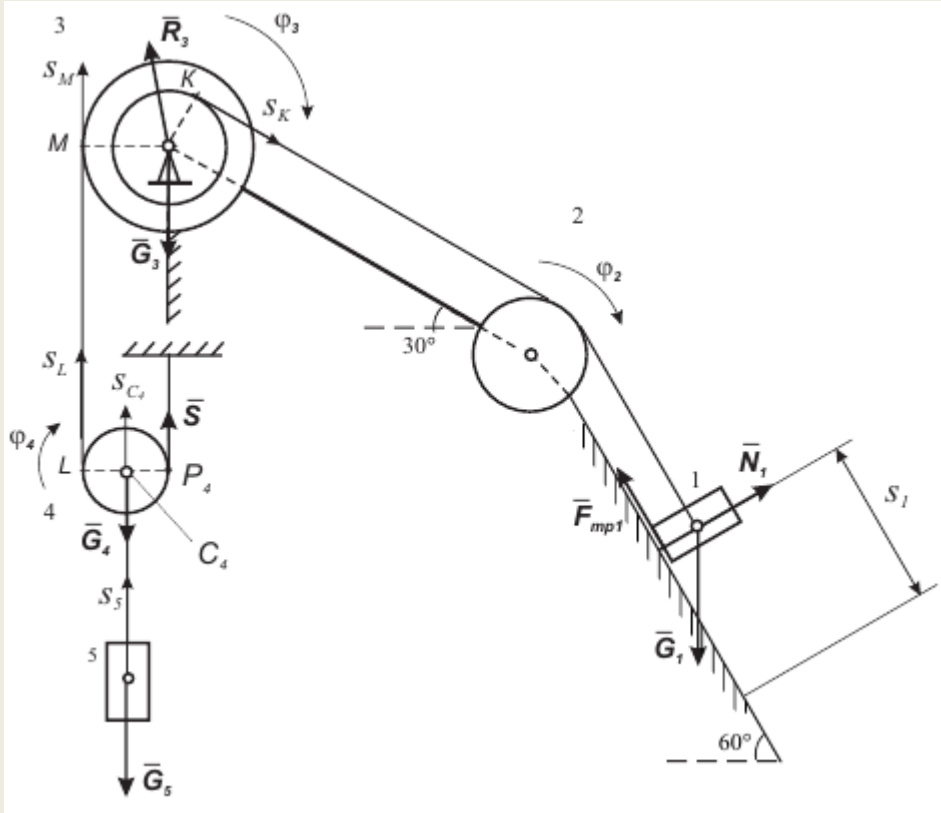
$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m; m_5=2m;$$

$R_3=3r; r_3=2r$ ; радиус инерции шкива  $\rho_3=r\sqrt{3}$ ;  $r_4=r$ ;  
коэффициент трения груза 1 о наклонную  
плоскость  $f=0,2$ ;  $s_1=1$  м.

Найти:  $V_1$

**Примечание:** Соотношения между перемещениями  
связаны такими же кинематическими соотношениями,  
что и соотношения между скоростями

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$ ;  $m_2=0$ ;  $m_3=2m$ ;  $m_4=m$ ;  $m_5=2m$ ;

$R_3=3r$ ;  $r_3=2r$ ; радиус инерции шкива  $\rho_3=r\sqrt{3}$ ;  $r_4=r$ ;

коэффициент трения груза 1 о наклонную  
плоскость  $f=0,2$ ;  $s_1=1$  м.

Найти:  $V_1$

**Сумма работ внешних сил** с учетом соотношений между перемещениями:

$$\begin{aligned}\sum A_k^e &= +\frac{\sqrt{3}}{2}m_1g \cdot s_1 - 0,5fm_1g \cdot s_1 - m_4g \cdot s_{C_4} - m_5g \cdot s_5 = \\ &= +\frac{\sqrt{3}}{2}4mg \cdot s_1 - 0,5f \cdot 4mg \cdot s_1 - mg \cdot 0,75s_1 - 2mg \cdot 0,75s_1 = \\ &= (+2\sqrt{3} - 0,4 - 3 \cdot 0,75) \cdot mg \cdot s_1 = +0,814 mgs_1\end{aligned}$$

Приравниваем левую и правую части теоремы:

$$\sum A_k^e = A_{G_1} + A_{F_{мп1}} + A_{G_4} + A_{G_5} = +0,814 mgs_1$$

$$T = T_1 + T_3 + T_4 + T_5 = 3,875 \cdot mV_1^2$$

$$3,875 \cdot mV_1^2 = 0,814mg \cdot s_1$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{0,814g \cdot s_1}{3,875}} = \sqrt{\frac{0,814 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 1 \text{ м}}{3,875}} =$$

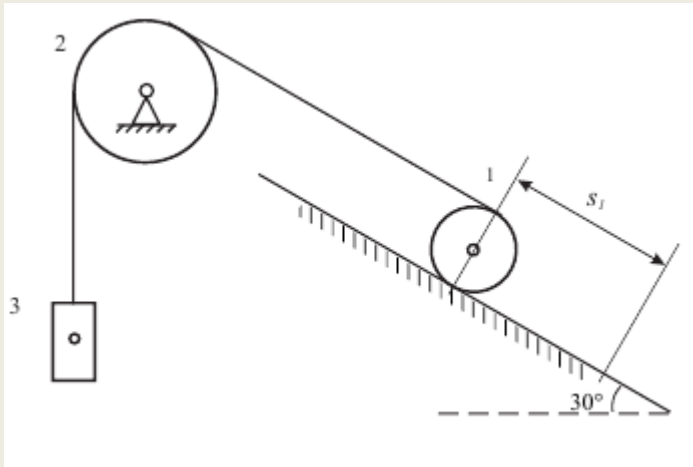
$$= \sqrt{\frac{7,985}{3,875}} \text{ м/с} = 1,436 \text{ м/с}$$

Ответ:  $V_1 = 1,436 \text{ м/с}$

**Примечание:** В случае отрицательного результата для суммы работ внешних сил, необходимо поменять направление движения системы и пересчитать работы заново для нового направления.

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями

## Задача 1



Исходные данные:

$$m_1=12m; m_2=m; m_3=2m;$$

$$R_2=1,6r; r_1=r; s_1=1 \text{ м.}$$

Найти:  $V_{C1}$

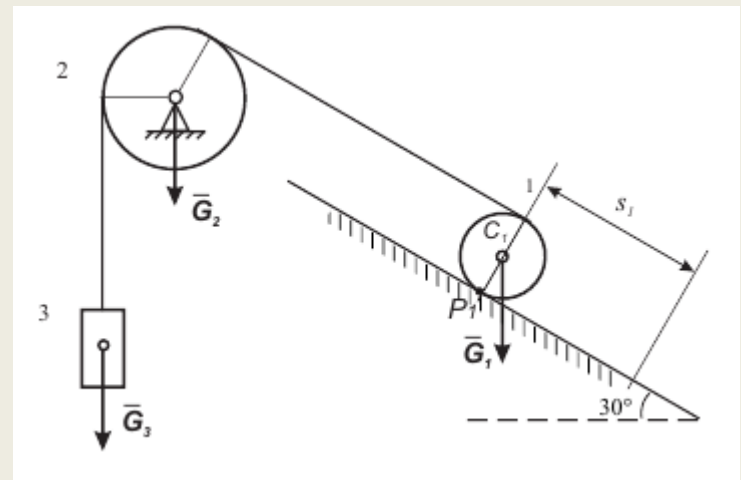
**Теорема об изменении кинетической энергии  
системы с идеальными связями**  $T - T_0 = \sum A_k^a$

Механическая система состоит из катка 1 (сплошной однородный цилиндр), груза 3, блока 2 (масса равномерно распределена по ободу). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимой невесомой нитью.

Под действием сил тяжести механическая система приходит в движение из состояния покоя. Каток катится по шероховатой наклонной плоскости без проскальзывания

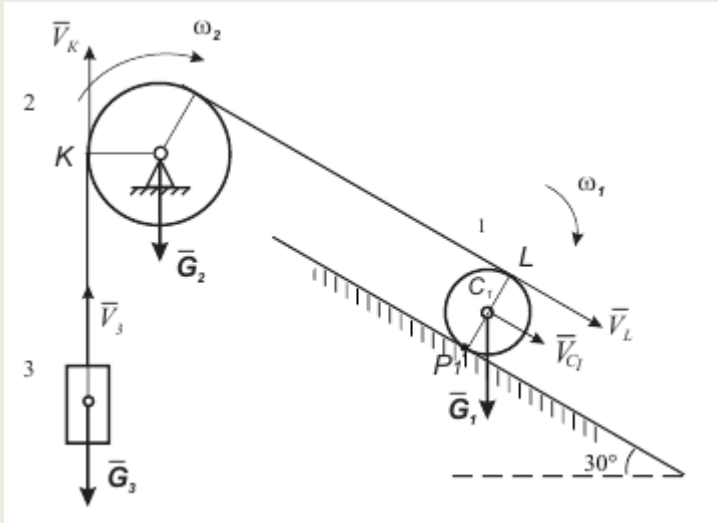
Определить скорость катка 1 в момент времени, когда он пройдет путь равный  $s_1$ .

Изобразим активные силы:



# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями

## Решение



Исходные данные:

$$m_1 = 12m; m_2 = m; m_3 = 2m;$$

$$R_2 = 1,6r; r_1 = r; s_1 = 1 \text{ м.}$$

Найти:  $V_{C1}$

**Теорема об изменении кинетической энергии системы с идеальными связями**  $T - T_0 = \sum A_k^a$

**Примечание:** Так как в начальный момент времени система находилась в покое  $T_0 = 0$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

**Каток 1** совершает плоскопараллельное движение ( $C_1$  – центр масс,  $P_1$  – мгновенный центр скоростей)

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_1 V_{C1}^2$$

Момент инерции катка

$$J_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 = 6mr^2$$

**Блок 2** совершает вращательное движение

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

Момент инерции блока

$$J_2 = m_2 R_2^2 = m(1,6r)^2 = 2,56mr^2$$

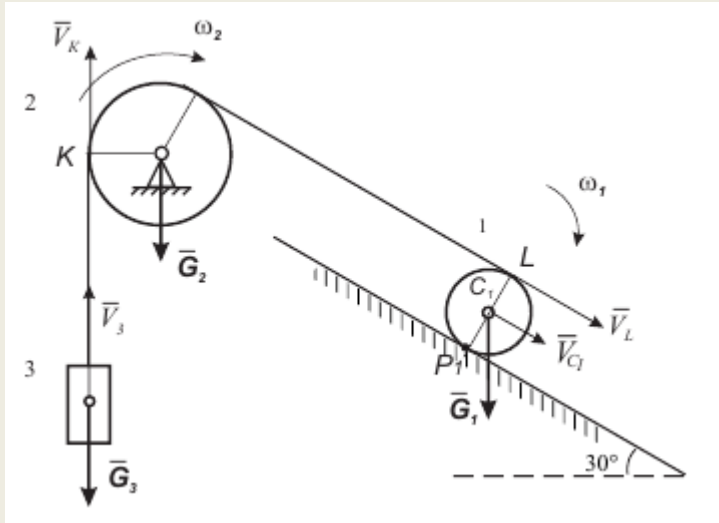
**Груз 3** совершает поступательное движение

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2$$

Тогда кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_1 V_{C1}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1 = 12m; m_2 = m; m_3 = 2m;$$

$$R_2 = 1,6r; r_1 = r; s_1 = 1 \text{ м.}$$

Найти:  $V_{C1}$

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_1 V_{C1}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2$$

$$J_1 = 6mr^2$$

$$J_2 = 2,56mr^2$$

**Соотношения между скоростями:**

$$V_{C1} = V_1$$

$$\omega_1 = \frac{V_{C1}}{C_1 P_1} = \frac{V_{C1}}{r_1} = \frac{V_1}{r}$$

$$V_L = \omega_1 \cdot C_1 L = \frac{V_1}{r} \cdot 2r = 2V_1$$

$$V_K = V_L = 2V_1$$

$$\omega_2 = \frac{V_K}{R_2} = \frac{2V_1}{1,6r} = 1,25 \frac{V_1}{r}$$

$$V_3 = V_K = 2V_1$$

Подставим массово-инерционные характеристики :

$$T = \frac{1}{2} 6mr^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} 12m V_{C1}^2 + \frac{1}{2} 2,56mr^2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} 2m V_3^2$$

Подставим соотношения между скоростями:

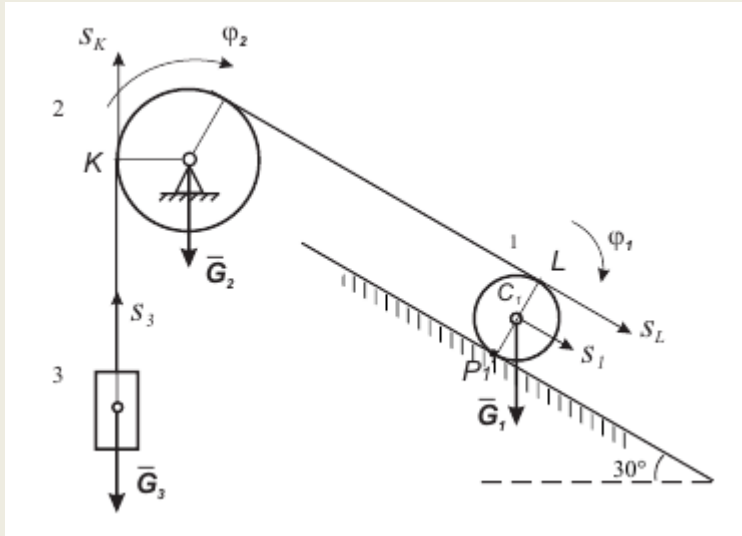
$$T = \frac{1}{2} 6mr^2 \left( \frac{V_1}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} 12m V_1^2 + \frac{1}{2} 2,56mr^2 \left( 1,25 \frac{V_1}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} 2m (2V_1)^2$$

$$T = (3 + 6 + 2 + 4) \cdot m V_1^2 = 15m V_1^2$$

**Окончательно кинетическая энергия системы равна:**

$$T = 15 \cdot m V_1^2$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=12m; m_2=m; m_3=2m;$$

$$R_2=1,6r; r_1=r; s_1=1 \text{ м.}$$

Найти:  $V_{C_1}$

**Примечание:** Соотношения между перемещениями связаны такими же кинематическими соотношениями, что и соотношения между скоростями

**Кинетическая энергия системы равна:**

$$T = 15 \cdot m V_1^2$$

**Сумма работ активных сил** на перемещении системы, соответствующем перемещению  $s_1$  груза 1:

$$\sum A_k^e = A_{G_1} + A_{G_3}$$

$$A_{G_1} = +G_1 \cdot s_1 \cdot \sin 30^\circ = +0,5m_1g \cdot s_1 = +6mg \cdot s_1$$

$$A_{G_3} = -G_3 \cdot s_3 = -m_3g \cdot s_3 = -2mg \cdot s_3$$

$$\sum A_k^e = A_{G_1} - A_{G_3} = +6mg \cdot s_1 - 2mg \cdot s_3$$

**Соотношения между скоростями:**

$$V_{C_1} = V_1$$

$$\omega_1 = \frac{V_1}{r}$$

$$\omega_2 = 1,25 \frac{V_1}{r}$$

$$V_3 = 2V_1$$

**Соотношения между перемещениями:**

$$s_{C_1} = s_1$$

$$\varphi_1 = \frac{s_1}{r}$$

$$\varphi_2 = 1,25 \frac{s_1}{r}$$

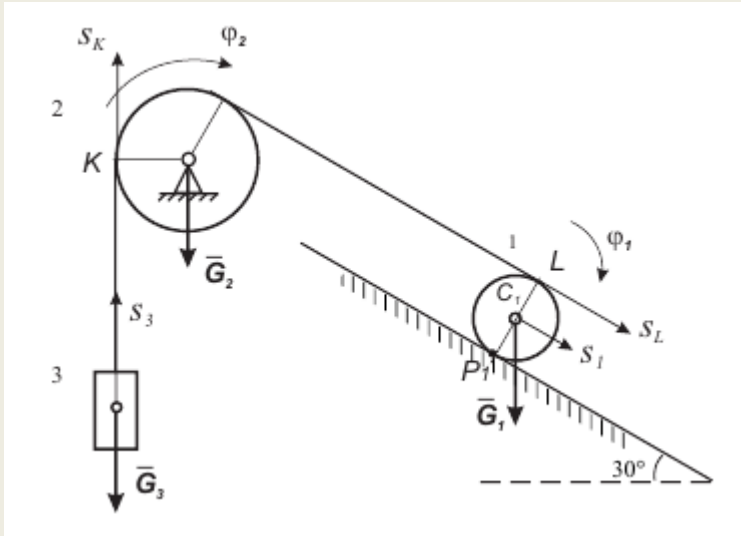
$$s_3 = 2s_1$$

**Сумма работ внешних сил** с учетом соотношений между перемещениями:

$$\sum A_k^e = +6mg \cdot s_1 - 2mg \cdot s_3 = +6mg \cdot s_1 - 4mg \cdot s_1 = +2mg \cdot s_1$$

$$\sum A_k^e = +2mg \cdot s_1$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Приравниваем левую и правую части теоремы:

$$T = 15 \cdot mV_I^2 \qquad \sum A_k^e = +2mg \cdot s_I$$

$$15 \cdot mV_I^2 = 2mg \cdot s_I$$

$$V_I = \sqrt{\frac{2g \cdot s_I}{15}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 1 \text{ м}}{15}} = \sqrt{1,308} \text{ м/с} = 1,144 \text{ м/с}$$

Исходные данные:

$$m_1 = 12m; m_2 = m; m_3 = 2m;$$

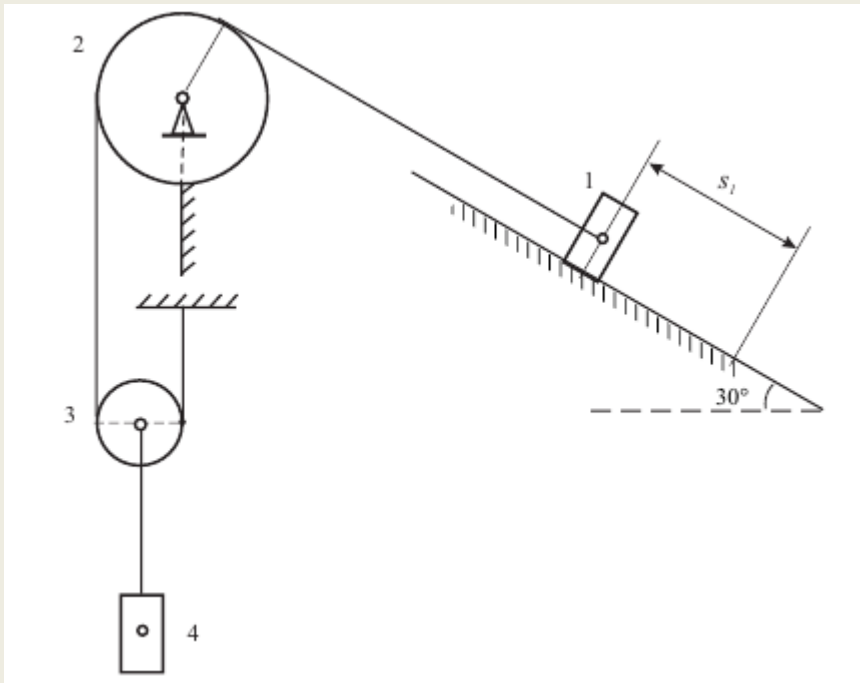
$$R_2 = 1,6r; r_1 = r; s_1 = 1 \text{ м.}$$

Найти:  $V_{C1}$

Ответ:  $V_{C1} = 1,144 \text{ м/с}$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями

## Задача 2



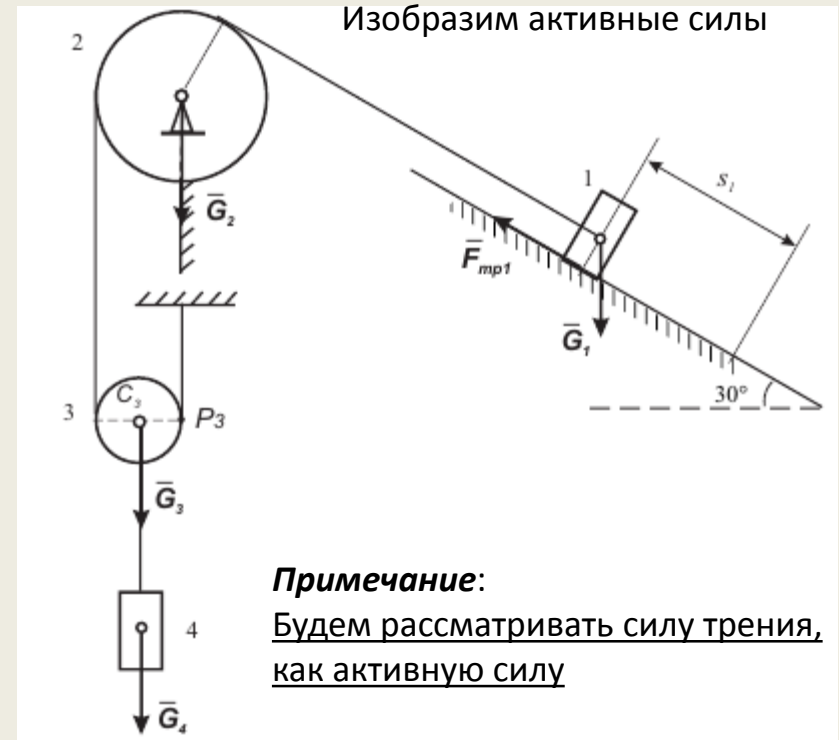
Механическая система состоит из грузов 1 и 4, барабана 2, и подвижного блока 3 (масса равномерно распределена по ободу). Тела системы соединены друг с другом нерастяжимой невесомой нитью.

Под действием сил тяжести механическая система приходит в движение из состояния покоя.

Проскальзывания нити по поверхности подвижного блока нет.

Определить скорость груза 1 в момент времени, когда он пройдет путь равный  $s_1$ .

Изобразим активные силы



Исходные данные:

$m_1=8m$ ;  $m_2=2m$ ;  $m_3=m$ ;  $m_4=2m$ ;

$R_2=2r$ ;  $i_2=r\sqrt{2}$ ;  $r_3=r$ ; коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость  $f=0,1$ ;

$s_1=1$  м.

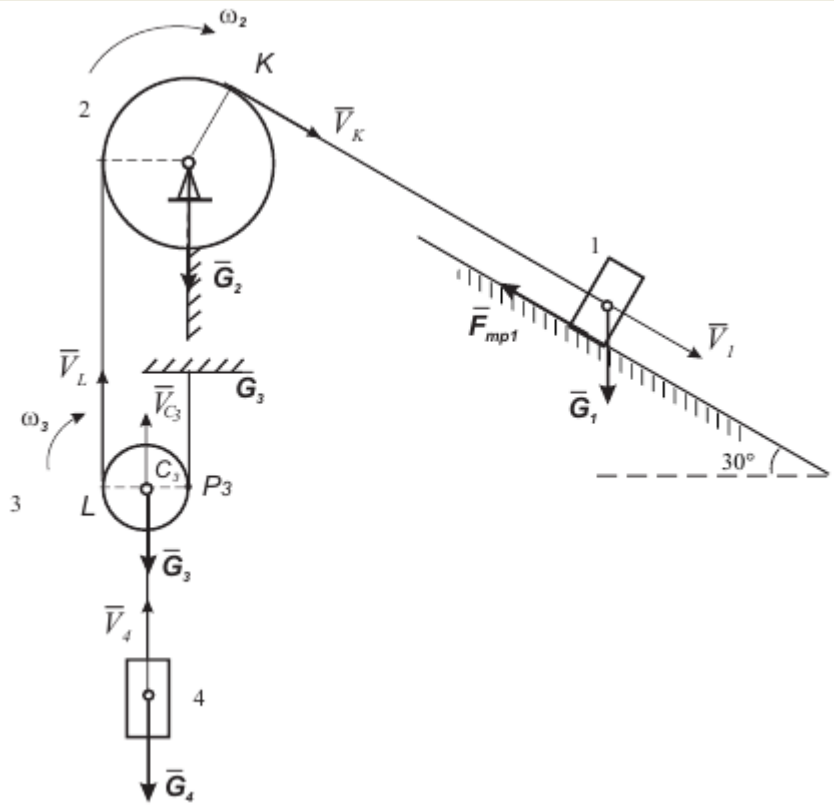
Найти:  $V_1$

**Теорема об изменении кинетической энергии  
системы с идеальными связями**  $T - T_0 = \sum A_k^a$

**Примечание:**

Будем рассматривать силу трения, как активную силу

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=8m; m_2=2m; m_3=m; m_4=2m;$$

$R_2=2r; i_2=r\sqrt{2}; r_3=r$ ; коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость  $f=0,1$ ;

$$s_1=1 \text{ м.}$$

Найти:  $V_1$

**Теорема об изменении кинетической энергии системы с идеальными связями**  $T - T_0 = \sum A_k^a$

Решение

Так как в начальный момент времени система находилась в покое  $T_0 = 0$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

**Груз 1** совершает поступательное движение

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

**Барабан 2** совершает вращательное движение

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

Момент инерции шкива

$$J_2 = m_2 i_2^2 = 2mr^2$$

**Блок 3** совершает плоскопараллельное движение ( $C_3$  – центр масс,  $P_3$  – мгновенный центр скоростей)

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_3 V_{C3}^2$$

Момент инерции блока

$$J_3 = m_3 r_3^2 = mr^2$$

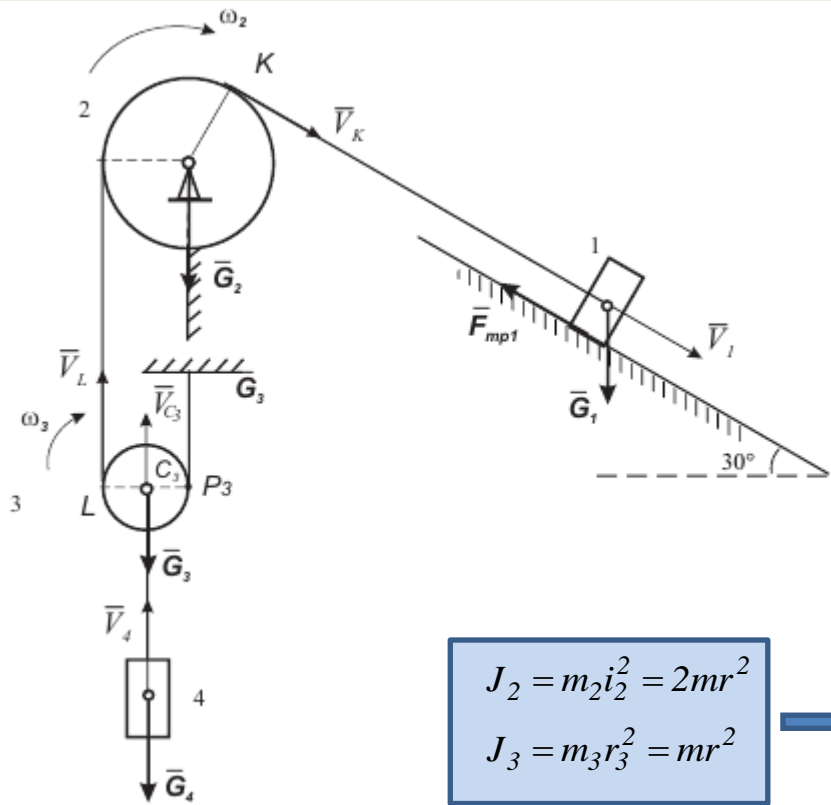
**Груз 4** совершает поступательное движение

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2$$

Тогда кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_3 V_{C3}^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



$$J_2 = m_2 i_2^2 = 2mr^2$$

$$J_3 = m_3 r_3^2 = mr^2$$

Исходные данные:

$m_1 = 8m$ ;  $m_2 = 2m$ ;  $m_3 = m$ ;  $m_4 = 2m$ ;  
 $R_2 = 2r$ ;  $i_2 = r\sqrt{2}$ ;  $r_3 = r$ ; коэффициент трения  
 груза 1 о наклонную плоскость  $f = 0,1$ ;  
 $s_1 = 1$  м. Найти:  $V_1$   
 Найти:  $V_1$

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_3 V_{C_3}^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2$$

Соотношения между скоростями:

$$V_K = V_1$$

$$\omega_2 = \frac{V_K}{R_2} = \frac{V_1}{2r}$$

$$V_L = V_K = V_1$$

$$\omega_3 = \frac{V_L}{LP_3} = \frac{V_L}{2r_3} = \frac{V_1}{2r} = 0,5 \frac{V_1}{r}$$

$$V_{C_3} = \omega_3 \cdot C_3 P_3 =$$

$$= \omega_3 \cdot r_3 = 0,5 \frac{V_1}{r} \cdot r = 0,5 V_1$$

$$V_4 = V_{C_3} = 0,5 V_1$$

Подставим массово-инерционные характеристики :

$$T = \frac{1}{2} 8m V_1^2 + \frac{1}{2} 2mr^2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} mr^2 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m V_{C_3}^2 + \frac{1}{2} 2m V_4^2$$

Подставим соотношения между скоростями:

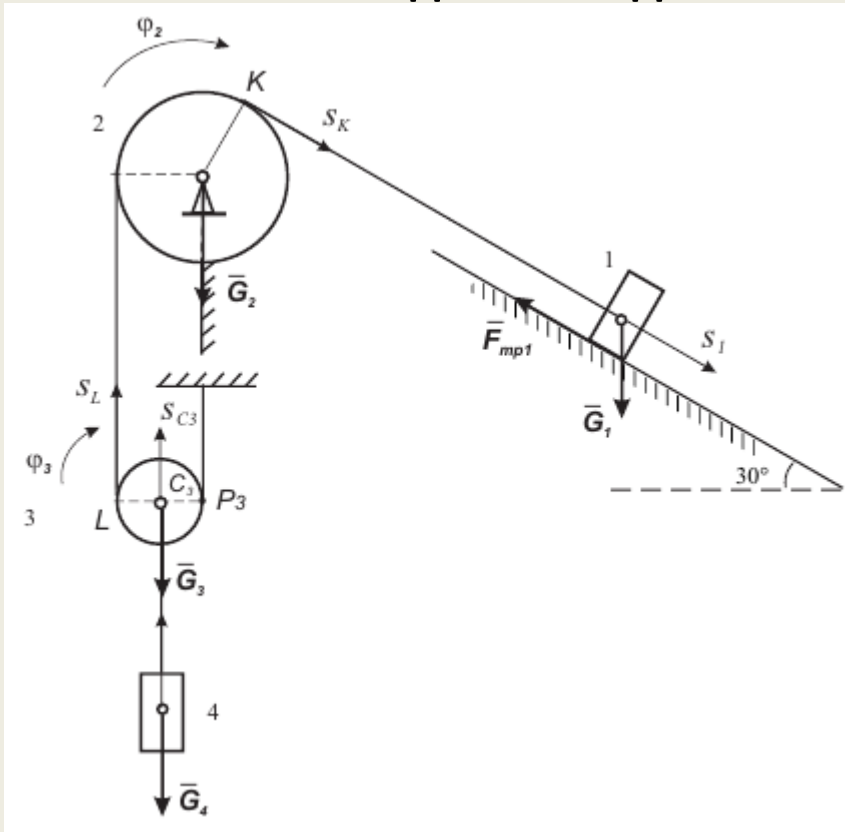
$$T = \frac{1}{2} 8m V_1^2 + \frac{1}{2} 2mr^2 \left( \frac{V_1}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} mr^2 \left( \frac{V_1}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} m (0,5 V_1)^2 + \frac{1}{2} 2m (0,5 V_1)^2$$

$$T = (4 + 0,25 + 0,125 + 0,125 + 0,25) \cdot m V_1^2 = 4,75 \cdot m V_1^2$$

Окончательно кинетическая энергия системы равна:

$$T = 4,75 \cdot m V_1^2$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=8m$ ;  $m_2=2m$ ;  $m_3=m$ ;  $m_4=2m$ ;

$R_2=2r$ ;  $i_2=r\sqrt{2}$ ;  $r_3=r$ ; коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость  $f=0,1$ ;

$s_1=1$  м.

Найти:  $V_1$

**Сумма работ активных сил** на перемещении системы, соответствующем перемещению  $s_1$  груза 1:

$$\sum A_k^e = A_{G_1} + A_{F_{mp1}} + A_{G_3} + A_{G_4}$$

$$A_{G_1} = +G_1 \cdot s_1 \cdot \sin 30^\circ = +0,5m_1g \cdot s_1 = +4mg \cdot s_1$$

$$A_{F_{mp1}} = -F_{mp1} \cdot s_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}0,1m_1g \cdot s_1 = -0,6928mg \cdot s_1$$

$$A_{G_3} = -G_3 \cdot s_{C_3} = -m_3g \cdot s_{C_3} = -mg \cdot s_{C_3}$$

$$A_{G_4} = -G_4 \cdot s_4 = -m_4g \cdot s_4 = -2mg \cdot s_4$$

Сила трения скольжения по закону Кулона равна:

$$F_{mp1} = f \cdot N_1 = f \cdot G_1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}0,1 \cdot m_1g$$

$$\sum A_k^e = A_{G_1} - A_{F_{mp1}} - A_{G_3} - A_{G_4} =$$

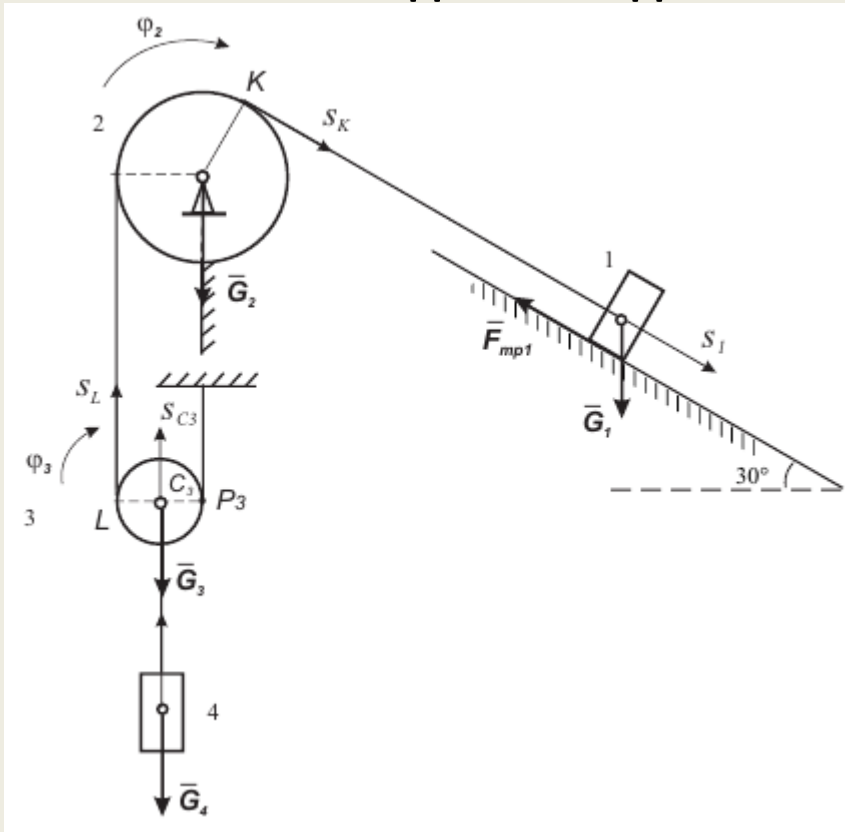
$$= +4mg \cdot s_1 - 0,6928mg \cdot s_1 - mg \cdot s_{C_3} - 2mg \cdot s_4$$

**Сумма работ активных сил :**

$$\sum A_k^e = +4mg \cdot s_1 - 0,6928mg \cdot s_1 - mg \cdot s_{C_3} - 2mg \cdot s_4$$

**Примечание:** В случае неидеальной связи - шероховатая поверхность, при скольжении тела по которой работу совершает сила трения, будем рассматривать силу трения, как активную силу

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=8m; m_2=2m; m_3=m; m_4=2m;$$

$R_2=2r; i_2=r\sqrt{2}$  ;  $r_3=r$ ; коэффициент трения груза 1 о наклонную плоскость  $f=0,1$ ;

$$s_1=1 \text{ м.}$$

Найти:  $V_1$

**кинетическая энергия системы :**

$$T = 4,75 \cdot m V_1^2$$

**Соотношения  
между скоростями:**

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{V_1}{2r} \\ \omega_3 &= 0,5 \frac{V_1}{r} \\ V_{C_3} &= 0,5 V_1 \\ V_4 &= 0,5 V_1 \end{aligned}$$

**Соотношения между  
перемещениями:**

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{s_1}{2r} \\ \varphi_3 &= 0,5 \frac{s_1}{r} \\ s_{C_3} &= 0,5 s_1 \\ s_4 &= 0,5 s_1 \end{aligned}$$

$$V_i \Rightarrow s_i$$

$$\omega_i \Rightarrow \varphi_i$$

**Примечание:** Соотношения между перемещениями связаны такими же кинематическими соотношениями, что и соотношения между скоростями

**Сумма работ активных сил :**

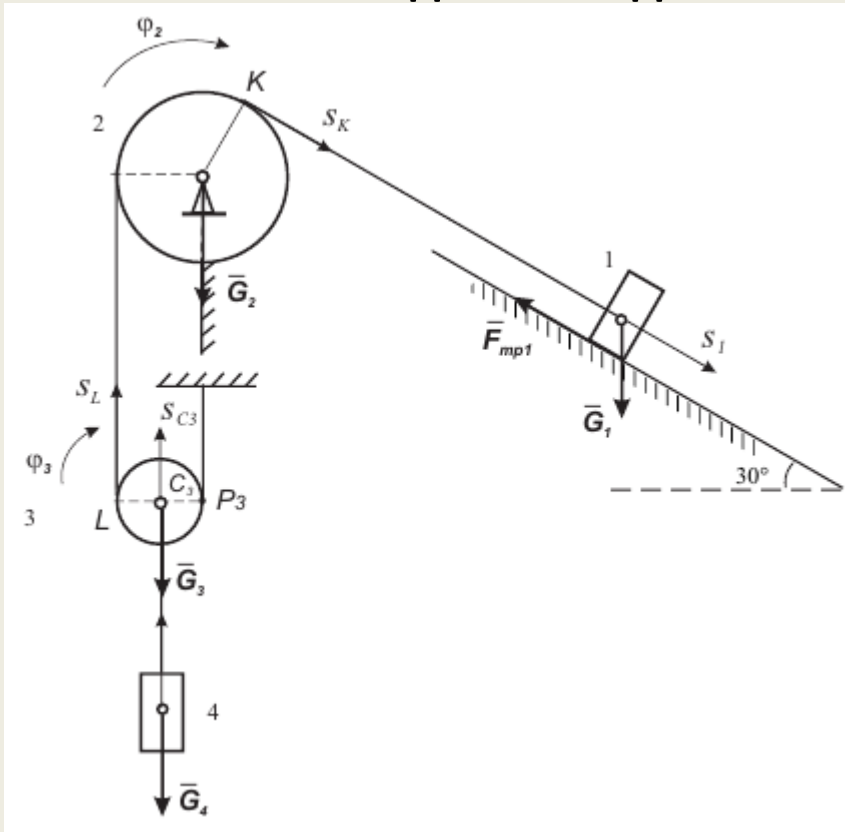
$$\sum A_k^e = +4mg \cdot s_1 - 0,6928mg \cdot s_1 - mg \cdot s_{C_3} - 2mg \cdot s_4$$

**Сумма работ активных сил** с учетом соотношений между перемещениями:

$$\begin{aligned} \sum A_k^e &= +4mg \cdot s_1 - 0,6928mg \cdot s_1 - mg \cdot s_{C_3} - 2mg \cdot s_4 = \\ &= +4mg \cdot s_1 - 0,6928mg \cdot s_1 - mg \cdot 0,5s_1 - 2mg \cdot 0,5s_1 = \\ &= (+4 - 0,6928 - 0,5 - 1) mg \cdot s_1 = +1,807mg \cdot s_1 \end{aligned}$$

$$\sum A_k^e = +1,807mg \cdot s_1$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Приравниваем левую и правую части теоремы:

$$T = 4,75 \cdot mV_I^2$$

$$\sum A_k^e = +1,807mg \cdot s_1$$

$$4,75 \cdot mV_I^2 = 1,807mg \cdot s_1$$

$$V_I = \sqrt{\frac{1,807g \cdot s_1}{4,75}} = \sqrt{\frac{1,807 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 1 \text{ м}}{4,75}} =$$

$$= \sqrt{3,732} \text{ м/с} = 1,932 \text{ м/с}$$

Исходные данные:

$$m_1=8m; m_2=2m; m_3=m; m_4=2m;$$

$R_2=2r; i_2=r\sqrt{2}$  ;  $r_3=r$ ; коэффициент трения  
груза 1 о наклонную плоскость  $f=0,1$ ;

$$s_1=1 \text{ м.}$$

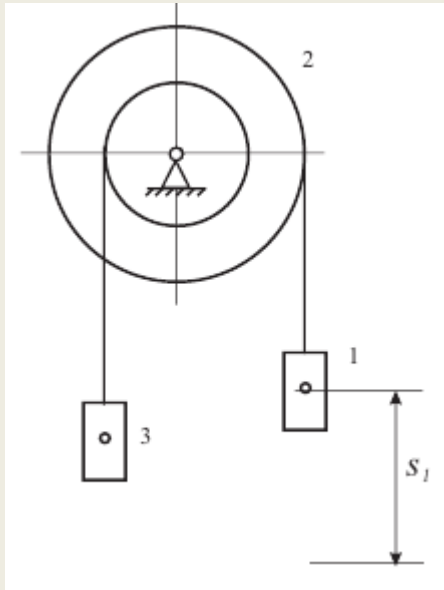
Найти:  $V_1$

Ответ:  $V_I = 1,932 \text{ м/с}$

**Примечание:** В случае отрицательного результата для суммы работ внешних сил, необходимо поменять направление движения системы и пересчитать работы заново для нового направления.

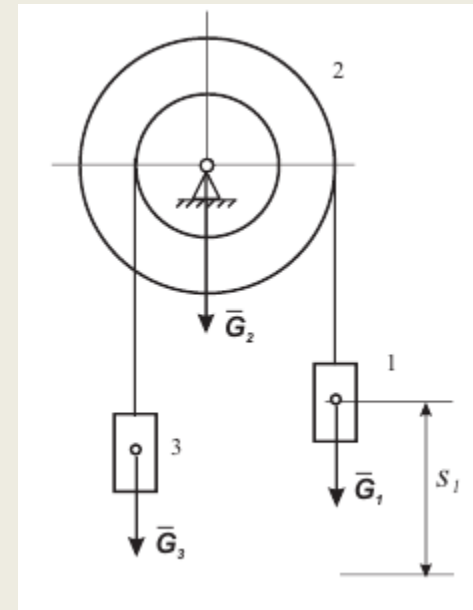
# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями

## Задача 3



Механическая система состоит из грузов 1, 3 и барабана 2. Тела системы соединены друг с другом нерастяжимыми невесомыми нитями. Под действием сил тяжести механическая система приходит в движение из состояния покоя. Определить скорость груза 1 в момент времени, когда он пройдет путь равный  $s_1$ .

Изобразим активные силы



Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m;$$

$$R_2=2r; r_2=r; i_2=r\sqrt{3}; s_1=1 \text{ м.}$$

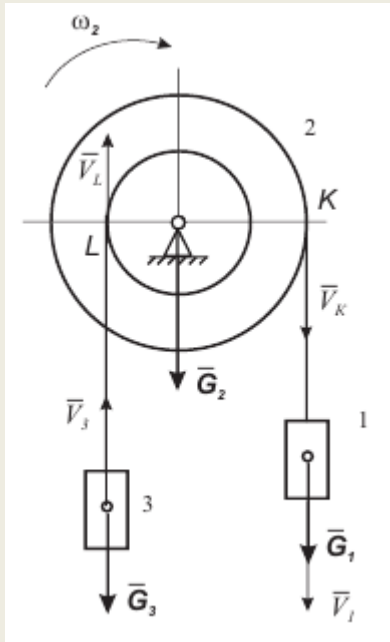
Найти:  $V_1$

**Теорема об изменении кинетической энергии  
системы с идеальными связями**

$$T - T_0 = \sum A_k^a$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями

Решение



Так как в начальный момент времени система находилась в покое  $T_0 = 0$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

**Груз 1** совершает поступательное движение

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

**Барaban 2** совершает вращательное движение

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$$

Момент инерции шкива

$$J_2 = m_2 i_2^2 = 3mr^2$$

**Груз 3** совершает поступательное движение

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_3^2$$

Тогда кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2$$

Исходные данные:

$$m_1 = 4m; m_2 = 2m; m_3 = m;$$

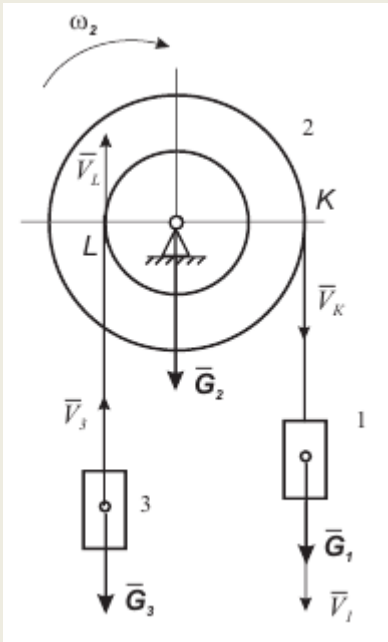
$$R_2 = 2r; r_2 = r; i_2 = r\sqrt{3}; s_1 = 1 \text{ м.}$$

Найти:  $V_1$

**Теорема об изменении кинетической энергии**

**системы с идеальными связями**  $T - T_0 = \sum A_k^a$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$m_1=4m$ ;  $m_2=2m$ ;  $m_3=m$ ;  
 $R_2=2r$ ;  $r_2=r$ ;  $i_2=r\sqrt{3}$  ;  $s_1=1$  м.

Найти:  $V_1$

$$J_2 = m_2 i_2^2 = 3mr^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 V_3^2$$

Соотношения между скоростями:

$$V_K = V_1$$

$$\omega_2 = \frac{V_K}{R_2} = \frac{V_1}{2r}$$

$$V_L = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{V_1}{2r} \cdot r = \frac{V_1}{2}$$

$$V_3 = V_L = 0,5V_1$$

$$\omega_2 = \frac{V_1}{2r}$$

$$V_3 = 0,5V_1$$

Подставим массово-инерционные характеристики :

$$T = \frac{1}{2} 4m V_1^2 + \frac{1}{2} 3mr^2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} m V_3^2$$

Подставим соотношения между скоростями:

$$T = \frac{1}{2} 4m V_1^2 + \frac{1}{2} 3mr^2 \left( \frac{V_1}{2r} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{V_1}{2} \right)^2$$

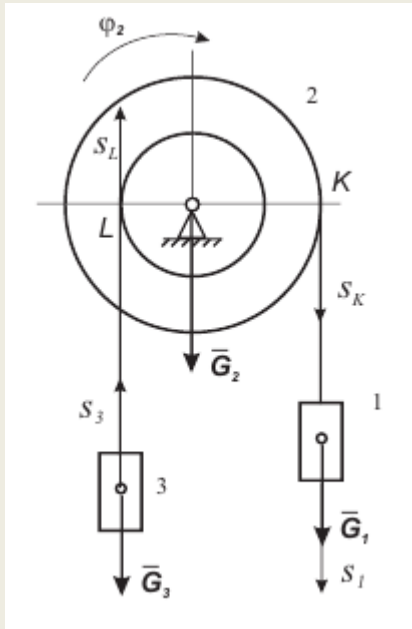
$$T = (2 + 0,375 + 0,125) \cdot m V_1^2 = 2,5 \cdot m V_1^2$$

Окончательно кинетическая энергия системы равна:

$$T = 2,5 \cdot m V_1^2$$

**Теорема об изменении кинетической энергии  
системы с идеальными связями**  $T - T_0 = \sum A_k^a$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



**Сумма работ активных сил** на перемещении системы, соответствующем перемещению  $s_1$  груза 1:

$$\sum A_k^e = A_{G_1} + A_{G_3}$$

$$A_{G_1} = +G_1 \cdot s_1 = +m_1 g \cdot s_1 = +4mg \cdot s_1$$

$$A_{G_3} = -G_3 \cdot s_3 = -m_3 g \cdot s_3 = -mg \cdot s_3$$

$$\sum A_k^e = A_{G_1} + A_{G_3} = +4mg \cdot s_1 - mg \cdot s_3$$

**Соотношения между скоростями:**

$$\omega_2 = \frac{V_1}{2r}$$

$$V_3 = 0,5V_1$$

**Соотношения между перемещениями:**

$$\varphi_2 = \frac{s_1}{2r}$$

$$s_3 = 0,5s_1$$

$$V_i \Rightarrow s_i$$

$$\omega_i \Rightarrow \varphi_i$$

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m;$$

$$R_2=2r; r_2=r; i_2=r\sqrt{3}; s_1=1 \text{ м.}$$

Найти:  $V_1$

**кинетическая энергия системы :**

$$T = 2,5 \cdot mV_1^2$$

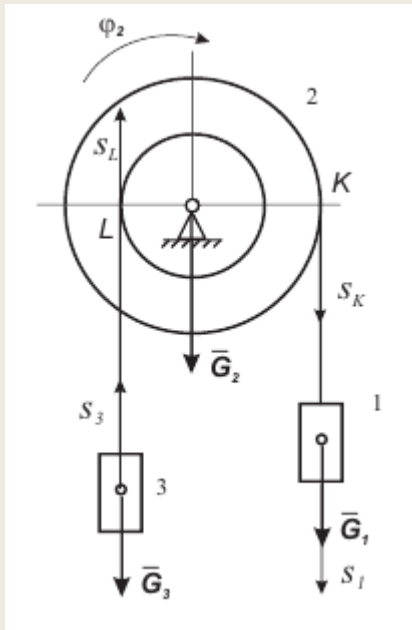
**Примечание:** Соотношения между перемещениями связаны такими же кинематическими соотношениями, что и соотношения между скоростями

**Сумма работ внешних сил** с учетом соотношений между перемещениями:

$$\sum A_k^e = +4mg \cdot s_1 - mg \cdot s_3 = +4mg \cdot s_1 - mg \cdot 0,5s_1 = +3,5mg \cdot s_1$$

$$\sum A_k^e = +3,5mg \cdot s_1$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Приравниваем левую и правую части теоремы:

$$T = 2,5 \cdot m V_1^2$$

$$\sum A_k^e = +3,5mg \cdot s_1$$

$$2,5 \cdot m V_1^2 = 3,5mg \cdot s_1$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{3,5g \cdot s_1}{2,5}} = \sqrt{\frac{3,5 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 1 \text{ м}}{2,5}} = \sqrt{13,734} \text{ м/с} = 3,706 \text{ м/с}$$

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=2m; m_3=m;$$

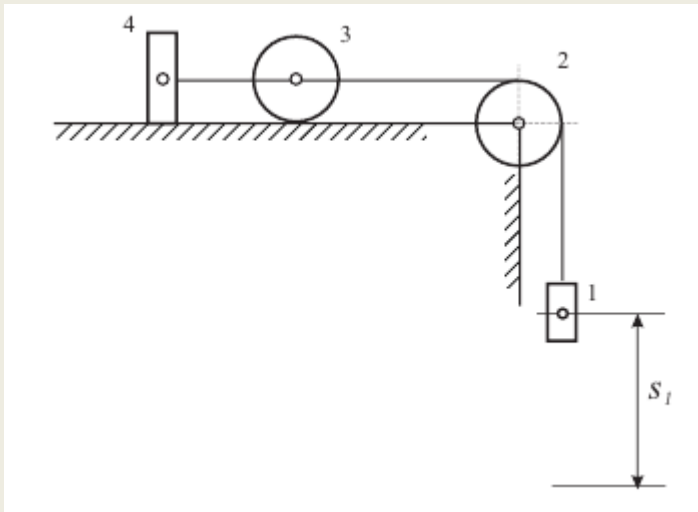
$$R_2=2r; r_2=r; i_2=r\sqrt{3}; s_1=1 \text{ м}.$$

Найти:  $V_1$

Ответ:  $V_1 = 3,706 \text{ м/с}$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями

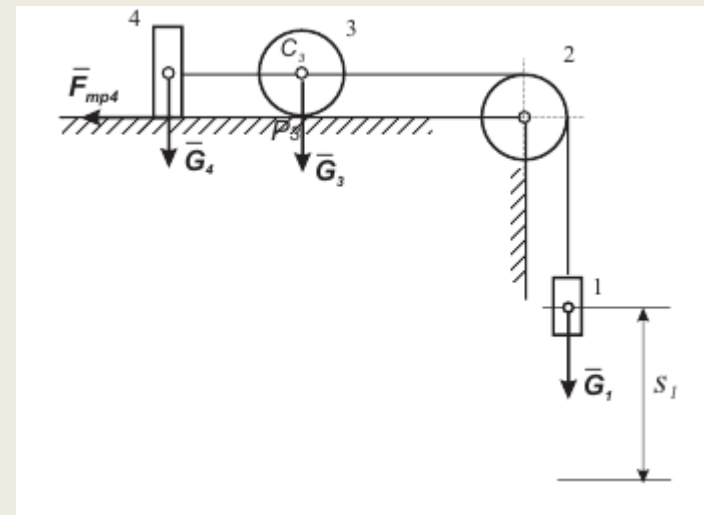
## Задача 4



Механическая система состоит из грузов 1 и 4, катка 3 (сплошной однородный цилиндр) и невесомого блока 2. Тела системы соединены друг с другом нерастяжимой невесомой нитью.

Под действием сил тяжести механическая система приходит в движение из состояния покоя. Каток катится по шероховатой плоскости без проскальзывания. Определить скорость катка 1 в момент времени, когда он пройдет путь равный  $s_1$ .

Изобразим активные силы



Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m$$

$r_3=r$ ; коэффициент трения груза 4 о плоскость  $f=0,2$ ;  $s_1=1$  м.

Найти:  $V_1$

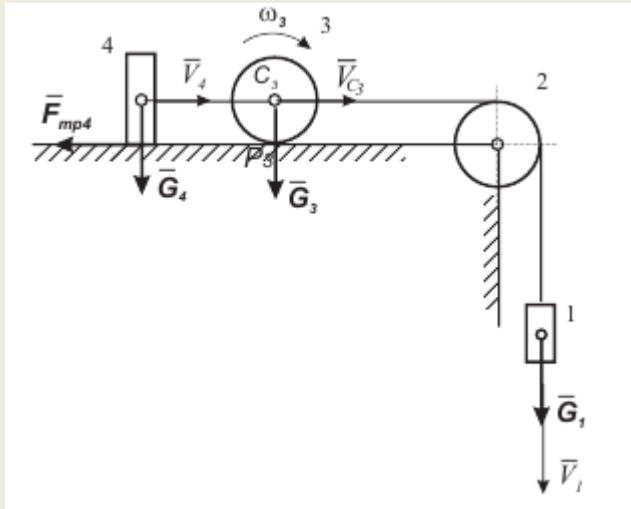
**Теорема об изменении кинетической энергии  
системы с идеальными связями**

$$T - T_0 = \sum A_k^a$$

**Примечание:**

Будем рассматривать силу трения,  
как активную силу

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Решение

Так как в начальный момент времени система находилась в покое  $T_0 = 0$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_3 + T_4$$

**Груз 1** совершает поступательное движение

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2$$

**Каток 3** совершает плоскопараллельное движение ( $C_3$  – центр масс,  $P_3$  – мгновенный центр скоростей)

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_3 V_{C_3}^2$$

Момент инерции шкива

$$J_3 = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 = m r^2$$

**Груз 4** совершает поступательное движение

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_4^2$$

Тогда кинетическая энергия системы равна:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_3 V_{C_3}^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2$$

Исходные данные:

$$m_1 = 4m; m_2 = 0; m_3 = 2m; m_4 = m$$

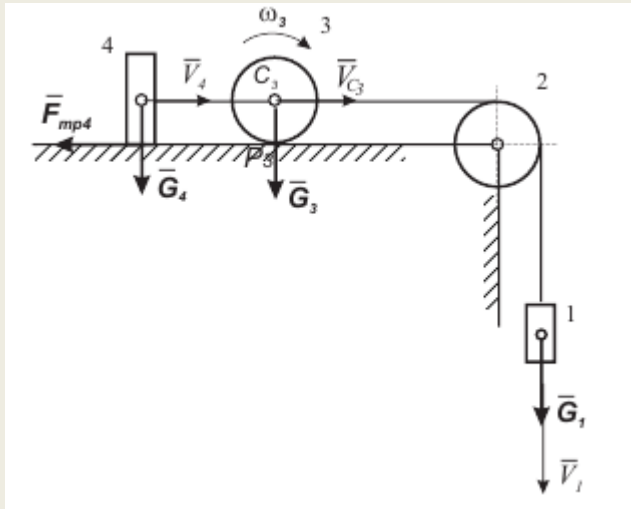
$r_3 = r$ ; коэффициент трения груза 4 о плоскость  $f = 0,2$ ;  $s_1 = 1$  м.

Найти:  $V_1$

**Теорема об изменении кинетической энергии**

**системы с идеальными связями**  $T - T_0 = \sum A_k^a$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Соотношения между скоростями:

$$\begin{aligned} V_{C_3} &= V_I \\ \omega_3 &= \frac{V_{C_3}}{C_3 P_3} = \frac{V_I}{r} \\ V_4 &= V_{C_3} = V_I \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} V_{C_3} &= V_I \\ \omega_3 &= \frac{V_I}{r} \\ V_4 &= V_I \end{aligned}$$

Подставим массово-инерционные характеристики :

$$T = \frac{1}{2} 4m V_I^2 + \frac{1}{2} m r^2 \omega_3^2 + \frac{1}{2} 2m V_{C_3}^2 + \frac{1}{2} m V_4^2$$

Подставим соотношения между скоростями:

$$T = \frac{1}{2} 4m V_I^2 + \frac{1}{2} m r^2 \left( \frac{V_I}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} 2m V_I^2 + \frac{1}{2} m V_I^2$$

$$T = (2 + 0,5 + 1 + 0,5) \cdot m V_I^2 = 4m V_I^2$$

Исходные данные:

$$m_1 = 4m; m_2 = 0; m_3 = 2m; m_4 = m$$

$r_3 = r$ ; коэффициент трения груза 4

о плоскость  $f = 0,2$ ;  $s_1 = 1$  м.

Найти:  $V_1$

$$J_3 = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 = m r^2$$

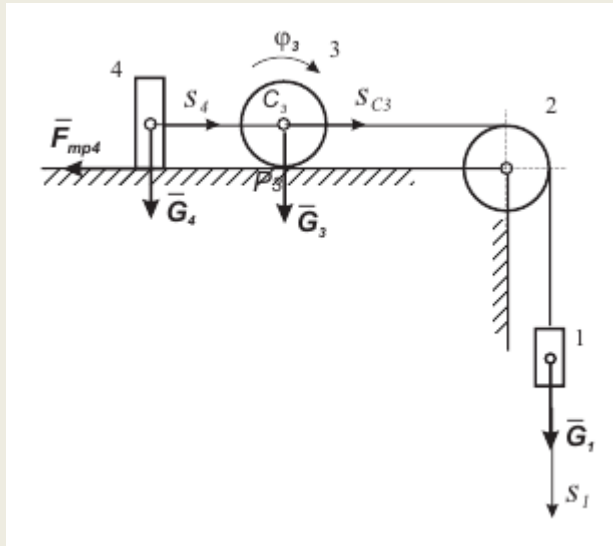
$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_3 V_{C_3}^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2$$

Окончательно кинетическая энергия  
системы равна:

$$T = 4 \cdot m V_I^2$$

**Теорема об изменении кинетической энергии  
системы с идеальными связями**  $T - T_0 = \sum A_k^a$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m$$

$r_3=r$ ; коэффициент трения груза 4  
о плоскость  $f=0,2$ ;  $s_1=1$  м.

Найти:  $V_1$

**Примечание:** Соотношения между перемещениями связаны такими же кинематическими соотношениями, что и соотношения между скоростями

**кинетическая энергия системы :**

$$T = 4 \cdot m V_1^2$$

**Сумма работ активных сил** на перемещении системы, соответствующем перемещению  $s_1$  груза 1:

$$\sum A_k^e = A_{G_1} + A_{F_{mp4}}$$

$$A_{G_1} = +G_1 \cdot s_1 = +m_1 g \cdot s_1 = +4mg \cdot s_1$$

$$A_{F_{mp4}} = -F_{mp4} \cdot s_4 = -0,2mg \cdot s_4$$

Сила трения скольжения по закону Кулона равна:

$$F_{mp4} = f \cdot N_4 = f \cdot G_4 = 0,2 \cdot mg$$

$$\sum A_k^e = A_{G_1} + A_{F_{mp4}} = +4mg \cdot s_1 - 0,2mg \cdot s_4$$

**Соотношения  
между скоростями:**

$$\begin{aligned} V_{C_3} &= V_1 \\ \omega_3 &= \frac{V_1}{r} \\ V_4 &= V_1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V_i &\Rightarrow s_i \\ \omega_i &\Rightarrow \varphi_i \end{aligned}$$

**Соотношения между  
перемещениями:**

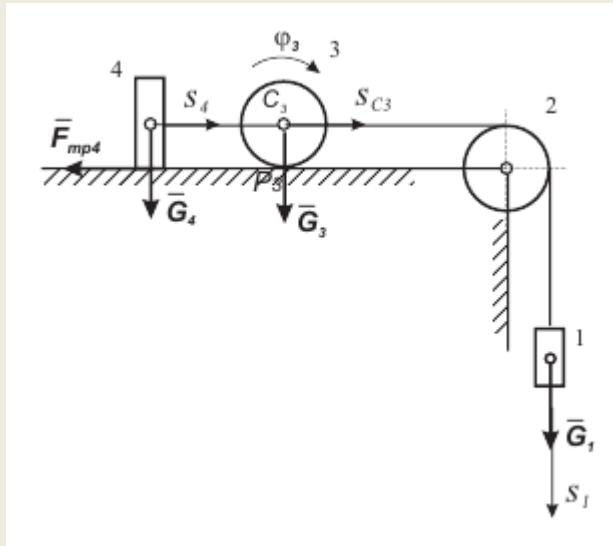
$$\begin{aligned} s_{C_3} &= s_1 \\ \varphi_3 &= \frac{s_1}{r} \\ s_4 &= s_1 \end{aligned}$$

**Сумма работ внешних сил** с учетом соотношений между перемещениями:

$$\sum A_k^e = +4mg \cdot s_1 - 0,2mg \cdot s_4 = +4mg \cdot s_1 - 0,2mg \cdot s_1 = +3,8mg \cdot s_1$$

$$\sum A_k^e = +3,8mg \cdot s_1$$

# Применение теоремы об изменении кинетической энергии к исследованию движения системы с идеальными связями



Приравниваем левую и правую части теоремы:

$$T = 4 \cdot m V_1^2$$

$$\sum A_k^e = +3,8mg \cdot s_1$$

$$4 \cdot m V_1^2 = 3,8mg \cdot s_1$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{3,8g \cdot s_1}{4}} = \sqrt{\frac{3,8 \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 \cdot 1 \text{ м}}{4}} = \sqrt{9,3195} \text{ м/с} = 3,053 \text{ м/с}$$

Исходные данные:

$$m_1=4m; m_2=0; m_3=2m; m_4=m$$

$r_3=r$ ; коэффициент трения груза 4  
о плоскость  $f=0,2$ ;  $s_1=1$  м.

Найти:  $V_1$

Ответ:  $V_{C_1} = 3,053 \text{ м/с}$

**Теорема об изменении кинетической энергии  
системы с идеальными связями**  $T - T_0 = \sum A_k^a$